

## Bab 5

# Relasi dan Fungsi

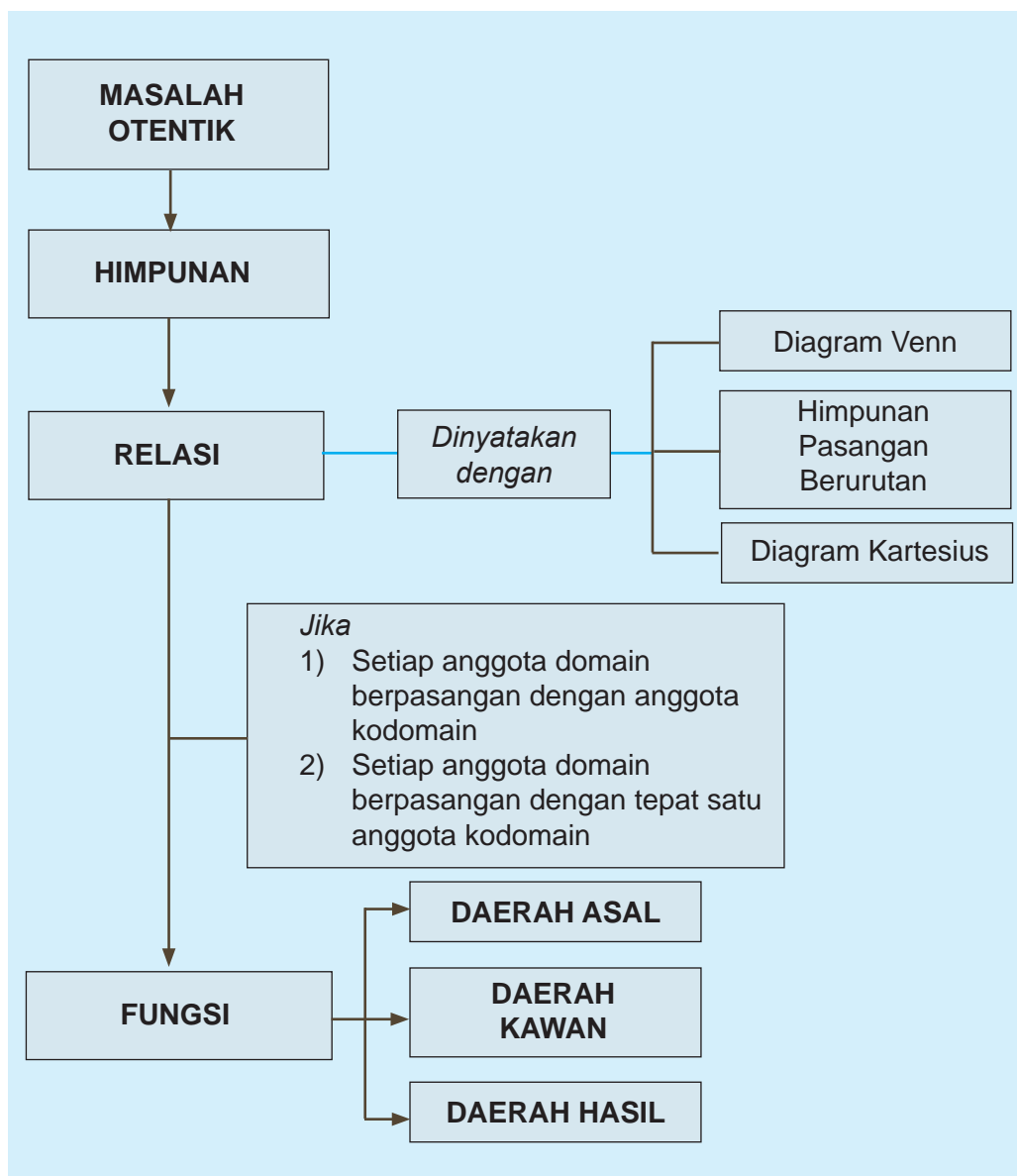
### A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah.</li><li>2. Mendeskripsikan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil suatu relasi antara dua himpunan yang disajikan dalam berbagai bentuk (grafik, himpunan pasangan terurut, atau ekspresi simbolik)</li><li>3. Mengidentifikasi relasi yang disajikan dalam berbagai bentuk yang merupakan fungsi.</li><li>4. Menerapkan daerah asal, dan daerah hasil fungsi dalam menyelesaikan masalah.</li></ol>	<p>Melalui pembelajaran relasi dan fungsi siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• menemukan konsep relasi dan fungsi melalui pemecahan masalah otentik;</li><li>• berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial-kultural;</li><li>• berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep relasi dan fungsi dalam memecahkan masalah otentik;</li><li>• menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu relasi;</li><li>• menyatakan sebuah relasi dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut, dan diagram venn;</li><li>• menemukan sifat-sifat relasi;</li><li>• menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep relasi berdasarkan sifat-sifat yang dituliskan sebelumnya;</li><li>• menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu fungsi;</li><li>• menyatakan sebuah fungsi dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut, dan diagram venn;</li><li>• menggunakan konsep dan prinsip relasi dan fungsi untuk memecahkan masalah otentik.</li></ul>

#### Istilah Penting

- *Relasi*
- *Fungsi*
- *Daerah asal (domain)*
- *Daerah kawan (kodomain)*
- *Daerah hasil (range)*

## B. PETA KONSEP

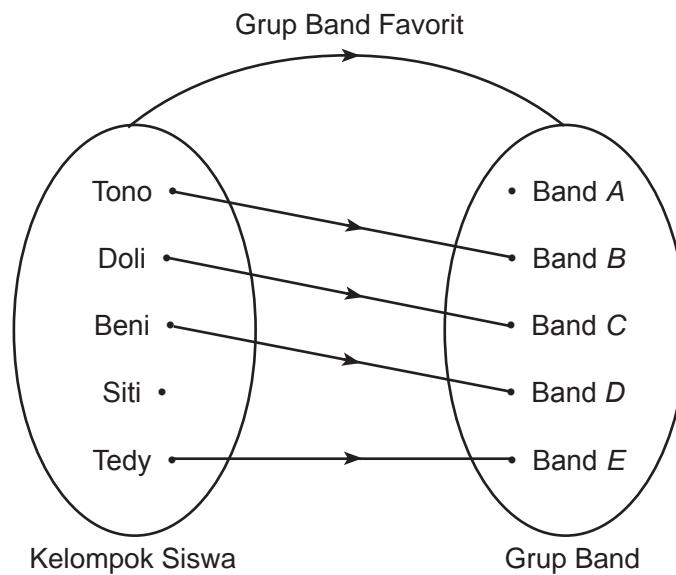




## C. MATERI PEMBELAJARAN

### 1. Menemukan Konsep Relasi

Gambar di bawah menyatakan hubungan antara kelompok siswa dengan kelompok grup band favoritnya.



Gambar 5.1 Grup band favorit sejumlah siswa

Dari gambar di atas, tanpa ada penjelasan yang lebih terinci dapat ditemukan fakta-fakta berikut.

- (1) Grup band favorit Tono adalah Band B.
  - (2) Grup band favorit Doli adalah Band C.
  - (3) Grup band favorit Beni adalah Band D.
- Selain ketiga fakta di atas, temukanlah fakta-fakta lain yang berhubungan dengan Gambar 5.1.
  - Diskusikan dengan temanmu mengapa kita bisa menduga fakta-fakta tersebut?



Bandingkan dengan gambar berikut.

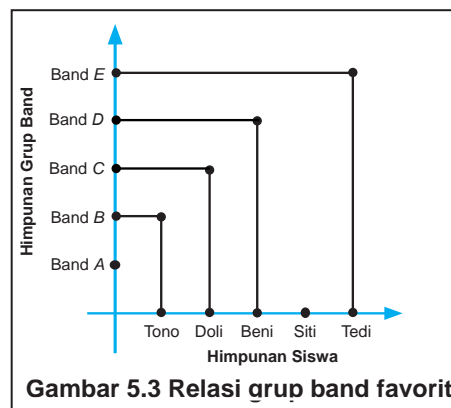


Perhatikan kedua gambar di atas, dari Gambar 5.1 dapat ditemukan beberapa hal karena ada garis panah yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band, dengan aturan menghubungkan adalah: ‘Grup band favorit’. Pada gambar 5.2 kita tidak dapat menemukan hubungan antara kelompok siswa dengan merek handpone yang ada karena tidak ada garis panah yang menghubungkan antara kelompok siswa dengan kelompok merek handpone.

Aturan yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band pada Gambar 5.1 disebut relasi antara kelompok siswa dengan grup band, relasinya adalah ‘grup band favorit’. Relasi yang disajikan pada Gambar 5.1 di atas ditandai dengan sebuah garis panah dari kelompok siswa menuju kelompok grup band favorit, relasi seperti ini biasa disebut relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah. Relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.

Relasi pada Gambar 5.1 di atas jika dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut ditunjukkan sebagai berikut.

Himpunan pasangan berurutan kelompok siswa dengan grup band favoritnya adalah:  $\{(Tono, Band B), (Doli, Band C), (Beni, Band D), (Tedy, Band E)\}$ . Jika dinyatakan dengan diagram kartesius hasilnya ditunjukkan seperti Gambar 5.3 di samping.





Untuk memahami pengertian relasi, perhatikan masalah berikut.



### Masalah-5.1

Dalam rangka memperingati HUT RI ke- 68 di Kabupaten Sorong, SMA Negeri 1 Sorong akan mengirimkan siswanya untuk mengikuti pertandingan antar siswa SMA pada pertandingan tenis lapangan, bola voli, bola kaki, *badminton*, tenis meja, dan catur. Terdapat 6 siswa (Udin, Joko, Dayu, Siti, Beni, dan Tono) yang akan mengikuti pertandingan tersebut. Sekolah membuat dua alternatif pilihan dalam menentukan pertandingan yang akan diikuti oleh keenam siswa tersebut. Kedua pilihan itu adalah:

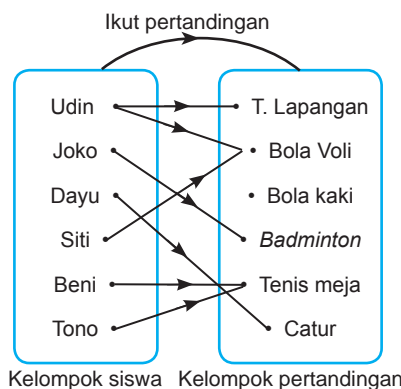
- 1) Udin ikut pertandingan tenis lapangan dan bola voli, Joko ikut pertandingan *badminton*, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola voli, Beni ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
- 2) Dayu dan Siti mengikuti pertandingan bola voli, Joko dan Udin mengikuti pertandingan bola kaki, Tono mengikuti pertandingan tenis meja, dan Beni mengikuti pertandingan catur.

Jika pilihan sekolah adalah butir (1), pasangkanlah siswa dengan jenis pertandingan yang akan diikuti menggunakan diagram panah, pasangan terurut, dan diagram kartesius.

### Alternatif Penyelesaian

Alternatif penyelesaian masalah ditunjukkan sebagai berikut.

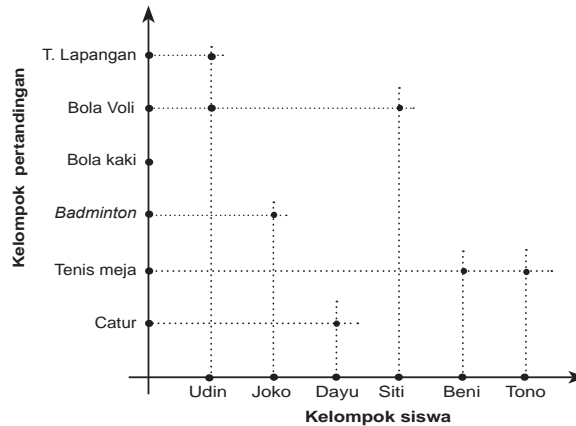
- 1) Dengan menggunakan pilihan butir (1), pasangan siswa dengan jenis pertandingan yang diikuti sebagai berikut.
  - a) Dengan diagram panah



Gambar 5.4 Pasangan siswa dengan pertandingan yang diikuti



- b) Dengan himpunan pasangan terurut  
Himpunan pasangan terurut:  $\{(Udin, \text{tenis lapangan}), (Udin, \text{bola volley}), (Joko, \text{badminton}), (Dayu, \text{catur}), (Siti, \text{bola volley}), (Beni, \text{tenis meja}), (Tono, \text{tenis meja})\}$
- c) Dengan diagram kartesius



Gambar 5.5 Deskripsi pasangan siswa dengan jenis pertandingan yang diikuti

- 2) Sebagai latihanmu, cara yang sama dengan butir (1) pasangkanlah siswa dengan jenis pertandingan yang diikuti jika pilihan sekolah menggunakan pilihan butir (2).

Berdasarkan contoh dan alternatif penyelesaian masalah di atas, ditemukan definisi relasi sebagai berikut.



#### Definisi 5.1

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan. Relasi dari  $A$  ke  $B$  adalah aturan pengaitan/pemasangan anggota-anggota  $A$  dengan anggota-anggota  $B$ .

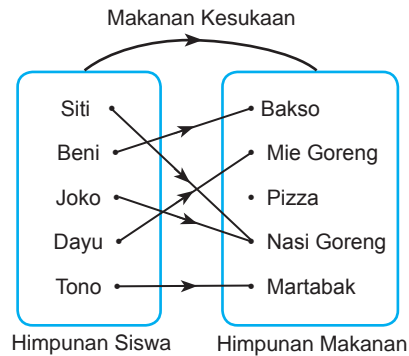
#### Catatan:

- 1) Relasi dapat terbentuk apabila terdapat dua himpunan/kelompok yang memiliki anggota yang akan dipasangkan satu dengan yang lain. Pada Gambar 5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa dan himpunan kedua yaitu himpunan grup band. Pada Masalah-5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa SMA Negeri 1 Sorong yang akan mengikuti pertandingan dan himpunan kedua yaitu himpunan cabang olah raga yang akan dipertandingkan.



- 2) Relasi dapat terbentuk apabila ada aturan yang mengaitkan antara anggota himpunan yang satu dengan anggota himpunan yang lain. Pada Gambar 5.1, nama siswa terhubung dengan grup band favoritnya. Pada Masalah-5.1, siswa yang akan bertanding dihubungkan dengan jenis pertandingan yang akan diikuti.

Perhatikan Masalah 5.1 untuk point (1), terlihat bahwa tanda panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang akan ikut bertanding ke anggota himpunan pertandingan yang akan di ikuti. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada Masalah 5.1 yaitu himpunan siswa disebut daerah asal (*domain*). Himpunan pertandingan yang akan diikuti disebut daerah kawan (*kodomain*). Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut daerah hasil (*range*), perhatikan Gambar 5.6 berikut ini.



**Gambar 5.6** Pasangan siswa dengan makanan kesukaan

Dari Gambar 5.6 di atas diperoleh data berikut.

- Relasi himpunan siswa dengan himpunan makanan adalah ‘makanan kesukaan’.
- Makanan kesukaan Siti dan Joko adalah nasi goreng.
- Makanan kesukaan Beni adalah bakso.
- Makanan kesukaan Dayu adalah mie goreng.
- Makanan kesukaan Tono adalah martabak.

Berdasarkan Gambar 5.6, himpunan siswa disebut daerah asal, himpunan makanan disebut daerah kawan, dan himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan dengan anggota daerah asal disebut daerah hasil, ditulis sebagai berikut.

- Daerah asal: {Siti, Beni, Joko, Dayu, Tono}
- Daerah kawan: {bakso, mie goreng, pizza, nasi goreng, martabak}
- Daerah hasil: {bakso, mie goreng, nasi goreng, martabak}



## Masalah-5.2

Salah satu upaya pemerintah daerah DKI Jakarta untuk mengurangi kemacetan adalah dengan menaikkan biaya parkir mobil di sepanjang jalan Jenderal Sudirman di Jakarta. Biaya parkir terbaru yang dikeluarkan pemda ditunjukkan pada tabel berikut.

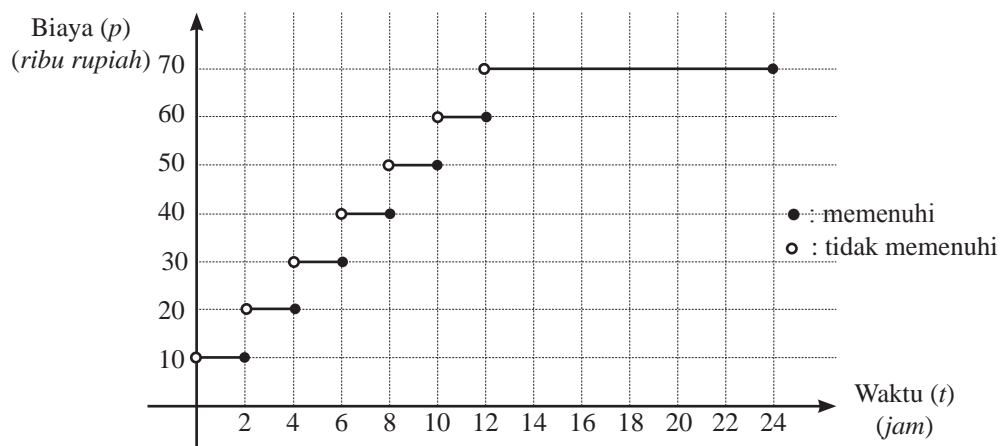
Tabel 5.1. Biaya parkir

No	Lama waktu ( $t$ ) (Dalam satuan jam)	Biaya Parkir ( $p$ ) (Dalam satuan ribu rupiah)
1	$0 < t \leq 2$	10
2	$2 < t \leq 4$	20
3	$4 < t \leq 6$	30
4	$6 < t \leq 8$	40
5	$8 < t \leq 10$	50
6	$10 < t \leq 12$	60
7	$12 < t \leq 24$	70

Gambarkanlah biaya parkir di atas dalam bentuk grafik kartesius. Jika seseorang memarkirkan mobilnya dari pukul 07.30 WIB sampai dengan pukul 10.00 WIB, berapa biaya parkir yang harus dibayar?

### Alternatif Penyelesaian

Tarif parkir berdasarkan Tabel 5.1 di atas, jika digambarkan dalam grafik kartesius ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 5.7 Biaya parkir per jam





Jika lama waktu parkir dari pukul 07.30 WIB sampai pukul 10.00 WIB, maka seseorang itu parkir selama 2 jam 30 menit dan membayar parkir sebesar Rp 20.000,-.

Hubungan antara lama waktu parkir dengan biaya parkir pada Masalah 5.2 di atas merupakan sebuah contoh relasi.

Dari relasi antara waktu parkir dengan biaya pada Masalah 5.2 di atas, dinyatakan hal-hal berikut.

Daerah asal adalah  $\{t : 0 < t \leq 24\}$

Daerah kawan adalah:  $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$

Daerah hasil adalah:  $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil sebagai berikut.



#### Definisi 5.2

Daerah asal atau biasa disebut domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.



#### Definisi 5.3

Daerah kawan atau biasa disebut kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang didefinisikan.



#### Definisi 5.4

Daerah hasil atau biasa disebut *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (*kodomain*) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

#### Pertanyaan Kritis

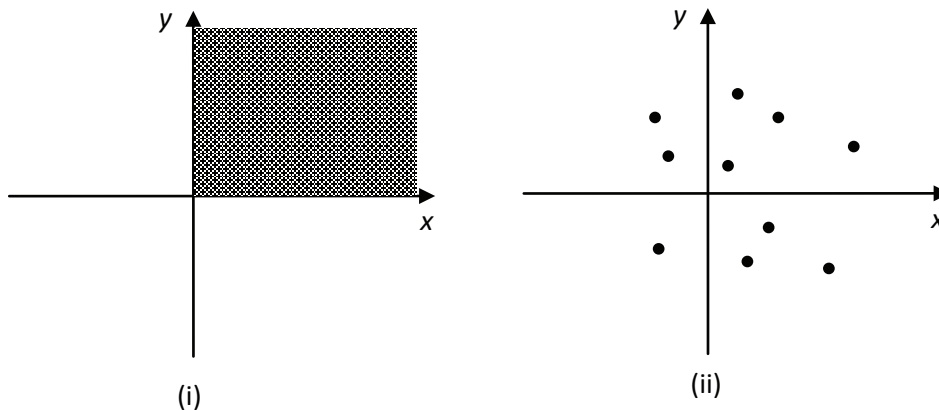
Apakah ada kemungkinan bahwa daerah kawan sama dengan daerah hasil? Berikan alasanmu!

Untuk lebih memahami definisi di atas, buatlah contoh dan bukan contoh relasi dalam kehidupanmu sehari-hari.



Sebuah relasi sering dinyatakan dalam bentuk persamaan dalam variabel  $x$  dan  $y$ , sebagai contoh:  $y = x + 1$  dan  $x = y^2$ . Nilai  $x$  merupakan domain relasi dan nilai  $y$  merupakan daerah hasil relasi. Pada persamaan  $y = x + 1$ , jika domain  $x$  dibatasi oleh  $0 < x \leq 5$ , untuk  $x$  bilangan real, maka daerah hasilnya adalah  $1 < y \leq 6$ .

Akan tetapi, tidak semua relasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.8 Jenis-jenis relasi

Berdasarkan Gambar 5.8, dapat diketahui bahwa:

- (i) Seluruh titik pada  $x > 0$  dan  $y > 0$  merupakan contoh relasi.
- (ii) Kesepuluh titik-titik pada Gambar 5.8 (ii) merupakan contoh relasi.

#### Pertanyaan Kritis

Pada persamaan  $x = y^2$ , apakah domainnya berlaku untuk semua  $x$  bilangan real? Jelaskan.

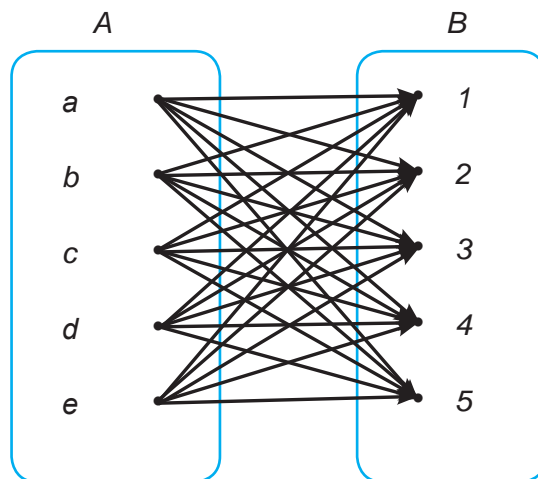
#### Contoh 5.1

Diberikan himpunan  $A = \{a, b, c, d\}$  dan  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pasangkanlah secara terurut setiap anggota himpunan  $A$  dengan setiap anggota himpunan  $B$ .



### Alternatif Penyelesaian

Pasangan terurut setiap anggota himpunan  $A$  dengan setiap anggota himpunan  $B$  ditunjukkan oleh diagram berikut.



Berdasarkan diagram di atas dapat disimpulkan bahwa banyak anggota himpunan pasangan berurutan anggota himpunan  $A$  dan himpunan  $B$  sebanyak  $5 \times 5 = 25$  buah pasangan. Pasangan dinyatakan dalam bentuk himpunan

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (a,5), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (b,5), \dots, (d,5)\}.$$

Secara umum himpunan pasangan terurut dinyatakan sebagai berikut.



#### Definisi 5.5

Misalkan  $A$  dan  $B$  dua himpunan. Relasi dari  $A$  ke  $B$  yang memasangkan setiap anggota himpunan  $A$  ke setiap anggota himpunan  $B$  disebut hasil kali kartesius  $A$  dan  $B$ , dan ditulis:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}.$$



## 2. Sifat-Sifat Relasi

Perhatikan contoh berikut.



### Contoh 5.2

Diketahui  $R$  relasi pada himpunan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , dan dinyatakan dengan pasangan terurut:  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ . Dari relasi ini diperoleh bahwa:

- ♦ Domain  $R$  adalah:  $\{1, 2, 3\}$  dan range  $R$  adalah:  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
- ♦  $1 \in \text{domain } R$  berpasangan dengan dirinya sendiri atau 1 berpasangan dengan 1. Pasangan terurut  $(1, 1) \in R$ .
- ♦  $2 \in \text{domain } R$  berpasangan dengan dirinya sendiri atau 2 berpasangan dengan 2. Pasangan terurut  $(2, 2) \in R$ .
- ♦  $3 \in \text{domain } R$  berpasangan dengan dirinya sendiri atau 3 berpasangan dengan 3. Pasangan terurut  $(3, 3) \in R$ .

Karena seluruh domain  $R$  berpasangan dengan dirinya sendiri, maka relasi  $R$  bersifat reflektif.

---

Bandingkan dengan Contoh 5.3 berikut.



### Contoh 5.3

Diketahui  $P$  relasi pada himpunan  $B = \{3, 4, 5\}$ , dan dinyatakan dengan pasangan terurut:  $P = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 3), (5, 4)\}$ . Dari relasi ini diketahui bahwa:

- ♦ Domain  $P$  adalah:  $\{3, 4, 5\}$  dan range  $P$  adalah:  $\{3, 4\}$ .
- ♦  $3 \in \text{domain } P$  berpasangan dengan dirinya sendiri atau 3 berpasangan dengan 3. Pasangan terurut  $(3, 3) \in P$ .
- ♦  $4 \in \text{domain } P$  berpasangan dengan dirinya sendiri atau 4 berpasangan dengan 4. Pasangan terurut  $(4, 4) \in P$ .
- ♦  $5 \in \text{domain } P$  tidak berpasangan dengan dirinya sendiri atau 5 tidak berpasangan dengan 5. Pasangan terurut  $(5, 5) \notin P$ .

Karena  $5 \in \text{domain } P$  tidak berpasangan dengan dirinya sendiri yaitu pasangan terurut  $(5, 5) \notin P$ , maka relasi  $P$  tidak bersifat reflektif.



### Sifat-1: Sifat Reflektif

Misalkan  $R$  sebuah relasi yang didefinisikan pada himpunan  $P$ . Relasi  $R$  dikatakan bersifat reflektif jika untuk setiap  $p \in P$  berlaku  $(p, p) \in R$ .



### Contoh 5.4

Diberikan himpunan  $P = \{1, 2, 3\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  pada himpunan  $P$  dengan hasil relasi adalah himpunan  $S = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$ . Relasi  $R$  tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan  $P$  berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.



### Contoh 5.5

Diberikan himpunan  $Q = \{2,4,5\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  pada himpunan  $Q$  dengan  $R = \{(a,b) \mid a \text{ kelipatan bulat } b, \text{ dengan } a,b \in Q\}$ , sehingga diperoleh  $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$ . Relasi  $R$  tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan  $Q$  berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.



### Contoh 5.6

Diberikan himpunan  $C = \{2,4,5\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  pada himpunan  $C$  dengan  $R = \{(a,b) \mid a + b < 9, \text{ dengan } a,b \in C\}$ , maka diperoleh  $S = \{(2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (5,2)\}$ . Relasi  $R$  tersebut tidak bersifat reflektif sebab ada anggota himpunan  $C$ , yaitu 5 tidak berelasi dengan dirinya sendiri atau  $(5, 5) \notin R$ .

### Sifat-2: Sifat Simetris

Misalkan  $R$  sebuah relasi pada himpunan  $P$ . Relasi  $R$  dikatakan bersifat simetris, apabila untuk setiap  $(x, y) \in R$  berlaku  $(y, x) \in R$ .



### Contoh 5.7

Diberikan himpunan  $P = \{1, 2, 3\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  pada himpunan  $P$  dengan  $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$ . Relasi  $R$  bersifat simetris sebab untuk setiap  $(x,y) \in R$ , berlaku  $(y,x) \in R$ .



### Contoh 5.8

Diberikan himpunan  $A = \{2, 4, 5\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  pada himpunan  $A$  dengan  $R = \{(x, y) \mid x \text{ kelipatan } y, \text{ dengan } x, y \in A\}$ , maka diperoleh  $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$ . Relasi  $R$  tersebut tidak bersifat simetris karena  $(4,2)$  anggota  $R$  tetapi  $(2,4) \notin R$ .

#### Sifat-3: Sifat Transitif

Misalkan  $R$  sebuah relasi pada himpunan  $P$ . Relasi  $R$  bersifat transitif apabila untuk setiap  $(x,y) \in R$  dan  $(y,z) \in R$  maka berlaku  $(x,z) \in R$ .

### Contoh 5.9

Diberikan himpunan  $P = \{1, 2, 3\}$ . Didefinisikan relasi pada himpunan  $P$  dengan hasil relasi adalah himpunan  $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ . Relasi  $R$  tersebut bersifat transitif sebab  $(x,y) \in R$  dan  $(y,z) \in R$  maka berlaku  $(x,z) \in R$ .

### Contoh 5.10

Diberikan himpunan  $C = \{1, 2, 3\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  dengan  $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$ . Relasi  $R$  tidak memenuhi sifat transitif, sebab terdapat  $(1,1) \in R$  dan  $(1,2) \in R$ , tetapi  $(2,1) \notin R$ .

#### Pertanyaan Kritis

- (1) Untuk membuktikan bahwa relasi  $R$  pada Contoh 5.9 bersifat transitif, apakah kamu boleh memilih  $x = 1$ ,  $y = 2$ , dan  $z = 3$ ? Mengapa?
- (2) Contoh yang dipilih untuk membuktikan bahwa relasi  $R$  pada Contoh 5.10 tidak bersifat transitif adalah:  $(1,1) \in R$  dan  $(1,2) \in R$ , tetapi  $(2,1) \notin R$ . Jika kamu perhatikan kembali Sifat-3, tentukan nilai  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  agar bukti itu benar. Berikan alasanmu.
- (3) Apakah ada contoh lain yang kamu pilih untuk membuktikan bahwa relasi  $R$  pada Contoh 5.10 tidak bersifat transitif? Sebutkan.



#### Sifat-4: Sifat Antisimetris

Misalkan  $R$  sebuah relasi pada sebuah himpunan  $P$ . Relasi  $R$  dikatakan bersifat antisimetris, apabila untuk setiap  $(x,y) \in R$  dan  $(y,x) \in R$  berlaku  $x = y$ .



#### Contoh 5.11

Diberikan himpunan  $C = \{2, 4, 5\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  pada himpunan  $C$  dengan  $R = \{ (a,b) \in a \text{ kelipatan } b, a,b \in C \}$  sehingga diperoleh  $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$ . Relasi  $R$  tersebut bersifat antisimetris.



#### Contoh 5.12

Diberikan  $S = \{1, 2, 3\}$ . Didefinisikan relasi  $R$  pada himpunan  $S$  dengan  $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ . Relasi  $R$  tidak bersifat antisimetris sebab terdapat  $(1,2) \in R$  dan  $(2,1) \in R$ , tetapi  $1 \neq 2$ .



#### Definisi 5.6

Misalkan  $R$  sebuah relasi pada himpunan  $P$ . Relasi  $R$  dikatakan relasi ekuivalensi jika dan hanya jika relasi  $R$  memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.



#### Contoh 5.13

Diberikan himpunan  $P = \{1, 2, 3\}$ . Didefinisikan relasi pada himpunan  $P$  dengan  $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ . Relasi  $R$  tersebut bersifat reflektif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi  $R$  merupakan relasi ekuivalensi.

Coba kerjasama dengan temanmu menunjukkan bahwa  $R$  dalam Contoh 5.13 memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif.



### 3. Menemukan Konsep Fungsi



#### Masalah-5.3

Lima orang siswa yaitu: Afnita, Anita, Amos, Alvenia, dan Aleks merupakan sahabat yang selalu bersama-sama dalam setiap kegiatan sekolah. Bapak Martono adalah guru matematika yang senang dengan persahabatan yang mereka bina karena mereka selalu memiliki nilai paling bagus dari antara teman-teman sekelasnya. Suatu hari bapak Martono ingin mengetahui data-data tentang mereka. Hal itu diperlukannya sebagai bahan motivasi untuk teman-teman satu kelas mereka. Data-data yang diinginkan berupa: berapa jam rata-rata waktu belajar mereka dalam satu hari, dan berapa banyak saudara mereka.

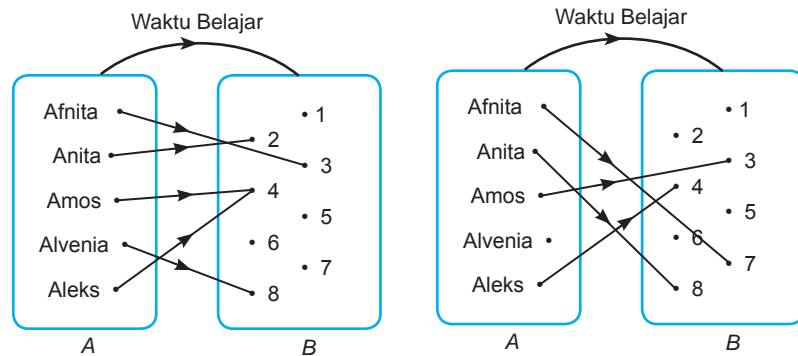
- 1) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya  $A = \{\text{Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}\}$ , dan lama waktu belajar dalam satu hari adalah  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .
  - a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurutmu menggambarkan lama waktu belajar lima orang sahabat itu.
  - b. Apakah semua anggota himpunan  $A$  pasti memiliki pasangan anggota himpunan  $B$ ? Berikan penjelasanmu!
  - c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan  $A$  berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan  $B$ ? Berikan penjelasanmu!
  - d. Apakah ada kemungkinan bahwa dua anggota himpunan  $A$  memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota himpunan  $B$ ? Berikan penjelasanmu!
- 2) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya  $C = \{\text{Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}\}$ , dan data tentang banyak saudara mereka adalah  $D = \{1, 2, 3, 4\}$ .
  - a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurutmu menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu.
  - b. Untuk semua relasi yang mungkin, apakah semua anggota himpunan  $C$  memiliki pasangan anggota himpunan  $D$ ? Berikan penjelasanmu!
  - c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan  $C$  berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan  $D$ ? Berikan penjelasanmu!
  - d. Apakah ada kemungkinan bahwa dua anggota himpunan  $C$  memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota himpunan  $D$ ? Berikan penjelasanmu!





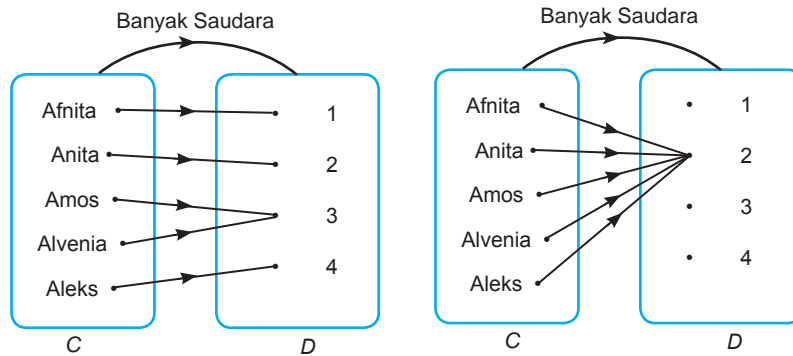
### Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui:  $A = \{\text{Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}\}$   
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- a. Relasi yang mungkin menggambarkan rata-rata lama waktu belajar lima orang sahabat itu.



Gambar 5.9 Relasi rata-rata jam belajar

- b. Jawabannya adalah tidak, karena anggota himpunan  $B$  telah dibatasi dari waktu 1 s/d 8 jam, maka diantara kelima sahabat itu dan kemungkinan lain memiliki rata-rata waktu belajar lebih dari 8 jam setiap hari.
- c. Jawabannya tidak. Anggota himpunan  $A$  dipasangkan dengan anggota himpunan  $B$  dengan relasi rata-rata lama waktu belajar. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan  $A$  akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan  $B$ .
- d. Jawabannya ya. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang dimungkinkan sama dengan nilai rata-rata waktu belajar orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan  $A$  memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan  $B$ .
2. Kelima sahabat itu membentuk satu himpunan misalnya himpunan  $C$  dan data tentang banyak saudara mereka himpunan  $D$ .  
Diketahui:  $C = \{\text{Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}\}$   
 $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- a) Relasi yang mungkin yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu ditunjukkan pada diagram panah berikut.



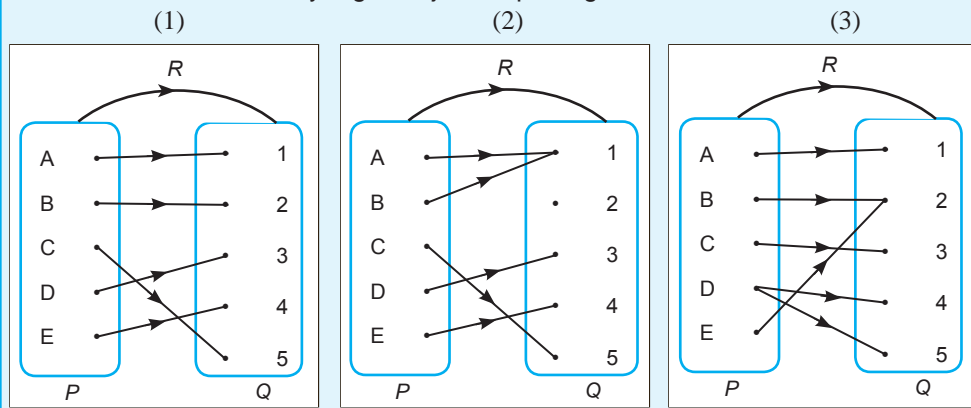
Gambar 5.10 Relasi banyak saudara

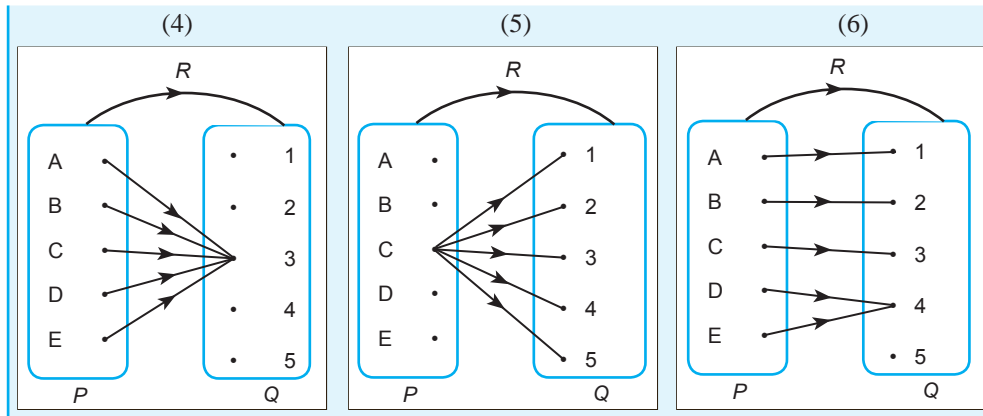
- b) Jawabannya ya. Karena data tentang banyak saudara kelima sahabat itu ada di anggota himpunan  $D$ , maka seluruh anggota himpunan  $C$  pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $D$ .
- c) Jawabannya tidak. Anggota himpunan  $A$  dipasangkan dengan anggota himpunan  $B$  dengan relasi banyak saudara. Banyak saudara seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan  $C$  akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan  $D$ .
- d) Jawabannya ya. Banyak saudara seseorang dimungkinkan sama dengan banyak saudara orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan  $C$  memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan  $D$ .



#### Masalah-5.4

Perhatikan relasi-relasi yang ditunjukkan pada gambar berikut.





Uraikanlah fakta-fakta untuk semua relasi yang ditunjukkan pada gambar.

### Alternatif Penyelesaian

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

#### Relasi 1:

- ◆ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan anggota himpunan  $Q$
- ◆ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan  $Q$
- ◆ Semua anggota himpunan  $Q$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $P$ .

#### Relasi 2:

- ◆ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$ .
- ◆ Ada anggota himpunan  $P$  yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan  $Q$ .
- ◆ Ada anggota himpunan  $Q$  yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $P$ .

#### Relasi 3:

- ◆ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$ .
- ◆ Ada anggota himpunan  $P$  yang berpasangan dengan dua anggota himpunan  $Q$ .
- ◆ Semua anggota himpunan  $Q$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $P$ .

#### Relasi 4:

- ◆ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$ .
- ◆ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan  $Q$ .
- ◆ Ada anggota himpunan  $Q$  yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $P$ .



#### Relasi 5:

- ♦ Ada anggota himpunan  $P$  yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$ .
- ♦ Ada anggota himpunan  $P$  yang berpasangan dengan semua anggota himpunan  $Q$ .
- ♦ Semua anggota himpunan  $Q$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $P$ .

#### Relasi 6:

- ♦ Ada anggota himpunan  $P$  yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$ .
- ♦ Ada anggota himpunan  $Q$  yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $P$ .

Relasi 1, relasi 2, dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- ♦ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$ .
- ♦ Semua anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan  $Q$ .

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.



#### Definisi 5.7

Misalkan  $A$  dan  $B$  himpunan.

Fungsi  $f$  dari  $A$  ke  $B$  adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan  $A$  dengan tepat satu anggota himpunan  $B$ .

Definisi 5.7 di atas, secara simbolik ditulis menjadi  $f: A \rightarrow B$ , dibaca: fungsi  $f$  memetakan setiap anggota himpunan  $A$  dengan tepat satu anggota himpunan  $B$ .

Jika  $f$  memetakan suatu elemen  $x \in A$  ke suatu  $y \in B$  dikatakan bahwa  $y$  adalah peta  $x$  oleh fungsi  $f$  dan peta ini dinyatakan dengan notasi  $f(x)$  dan  $x$  disebut prapeta  $y$ , dengan demikian dapat ditulis menjadi:

$f: x \rightarrow y$ , dibaca: fungsi  $f$  memetakan  $x$  ke  $y$ , sedemikian hingga  $y = f(x)$ .

Perhatikan kembali Masalah 5.3 di atas, berilah alasan mengapa relasi 3, relasi 5, dan relasi 6 bukan fungsi.

#### Alternatif Penyelesaian

- 1) Relasi 3 bukan fungsi karena ada anggota himpunan  $P$  yang berpasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan  $Q$  yaitu  $D$  yang berpasangan dengan 4 dan 5 meskipun seluruh anggota himpunan  $P$  memiliki pasangan di himpunan  $Q$ .



- 2) Relasi 5 bukan fungsi karena:
- Ada anggota himpunan  $P$  yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$  yaitu  $\{A, B, D, E\}$ .
  - Ada anggota himpunan  $P$  yang memiliki pasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan  $Q$  yaitu  $\{C\}$ .
- 3) Relasi 6 bukan fungsi karena ada anggota himpunan  $P$  yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan  $Q$  yaitu  $\{D\}$ .



### Contoh 5.14

Diketahui fungsi  $f: x \rightarrow f(x)$  dengan rumus fungsi  $f(x) = px - q$ . Jika  $f(1) = -3$  dan  $f(4) = 3$ , tentukanlah nilai  $p$  dan  $q$  kemudian tuliskanlah rumus fungsinya.

#### Alternatif Penyelesaian

Diketahui  $f(x) = px - q$ .

$$f(1) = -3$$

$$f(4) = 3.$$

Ditanya nilai  $p$ ,  $q$ , dan rumus fungsi

$$\text{Jika } f(1) = -3 \text{ maka } f(x) = px - q \rightarrow -3 = p - q \dots\dots\dots (1)$$

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

$$\text{Jika } f(4) = 3 \text{ maka } f(x) = px - q \rightarrow 3 = 4p - q \dots\dots\dots (2)$$

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$-3 = p - q$$

$$\underline{3 = 4p - q}$$

$$-6 = p - 4p$$

$$-6 = -3p$$

$$p = 2$$

Substitusi nilai  $p = 2$  ke persamaan  $-3 = p - q$

Sehingga diperoleh:

$$-3 = 2 - q$$

$$-3 = 2 - q \rightarrow q = 2 + 3 \rightarrow q = 5$$

Jadi diperoleh  $p = 2$  dan  $q = 5$

Berdasarkan nilai  $p$  dan  $q$ , maka rumus fungsi  $f(x) = px - q$  menjadi  $f(x) = 2x - 5$ .



### Contoh 5.15

Diketahui fungsi  $f$  dengan rumus  $f(x) = \sqrt{2x+6}$ . Tentukanlah domain fungsi  $f$  agar memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real.

#### Alternatif Penyelesaian

Diketahui:  $f(x) = \sqrt{2x+6}$

Ditanya: domain  $f$

Domain fungsi  $f$  memiliki pasangan dengan anggota himpunan bilangan real apabila

$$2x + 6 \geq 0,$$

$$2x \geq -6 \leftrightarrow x \geq -3.$$



### Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

Berdasarkan Contoh 5.15:

- Mengapa fungsi  $f$  memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real apabila  $2x + 6 \geq 0$ ?
- Apakah  $f$  terdefinisi untuk  $2x + 6 < 0$ ? Mengapa?
- Apakah  $x = -4$  memiliki pasangan? Mengapa?

### Contoh 5.16

Diketahui  $f$  suatu fungsi  $f: x \rightarrow f(x)$ . Jika 1 berpasangan dengan 4 dan  $f(x+1) = 2f(x)$ . Tentukan pasangan  $x = 4$ ?

#### Alternatif Penyelesaian

Diketahui:  $f: x \rightarrow f(x)$

$$f(1) = 4$$

$$f(x+1) = 2f(x)$$

Ditanya:  $f(4)$ ?

Jawab:  $f(x+1) = 2f(x)$

untuk  $x = 1$ , maka  $f(1+1) = 2f(1)$

$$f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$f(3) = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot 8 = 16$$

$$f(4) = 2 \cdot f(3) = 2 \cdot 16 = 32$$

karena  $f(4) = 32$ , maka pasangan  $x = 4$  adalah 32.



### Diskusi

Berdasarkan Contoh 5.16, diskusikan dengan temanmu hal-hal berikut.

- Tentukan pasangan  $x = 2013$
- Bagaimana cara paling cepat menentukan pasangan tersebut?



### Contoh 5.17

Diketahui  $f$  sebuah fungsi yang memetakan  $x$  ke  $y$  dengan rumus  $y = \frac{x+2}{2x-6}, x \neq 3$ .  
Tentukan rumus fungsi jika  $g$  memetakan  $y$  ke  $x$ .

#### Alternatif Penyelesaian

Diketahui  $f$  sebuah fungsi yang memetakan  $x$  ke  $y$  dengan rumus  $y = \frac{x+2}{2x-6}$ .  
Tuliskanlah rumus fungsi jika  $g$  memetakan  $y$  ke  $x$ .

*Diketahui:*  $f$  sebuah fungsi yang memetakan  $x$  ke  $y$  dengan rumus  $y = \frac{x+2}{2x-6}$ , dimana  $x \neq 3$  dan  $x$  bilangan real.

*Ditanya:* rumus fungsi  $g$  yang memetakan  $y$  ke  $x$ .

*Jawab:*

$$y = \frac{x+2}{2x-6}$$

$$\Leftrightarrow (2x-6)(y) = x+2 \quad (\text{kedua ruas dikalikan } 2x-6)$$

$$\Leftrightarrow 2xy - 6y = x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2xy - x = 6y + 2$$

$$\Leftrightarrow x(2y-1) = 6y+2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6y+2}{2y-1} \quad (\text{kedua ruas dibagi } 2y-1)$$

Maka fungsi  $g$  memetakan  $y$  ke  $x$  dengan rumus:  $g(y) = \frac{6y+2}{2y-1}$ .



### Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

Berdasarkan Contoh 5.17:

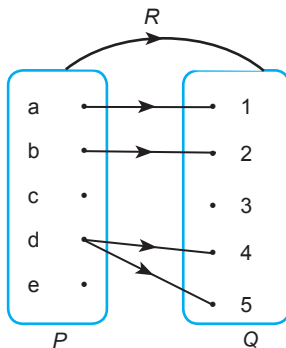
- Jika  $f: x \rightarrow y$ , apakah  $x = 3$  memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real? Mengapa?
- Jika  $g: y \rightarrow x$ , apakah  $y = \frac{1}{2}$  memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real? Mengapa?
- Berikan syarat agar  $f: x \rightarrow y$  terdefinisi.
- Berikan syarat agar  $g: y \rightarrow x$  terdefinisi.



### Uji Kompetensi 5.1

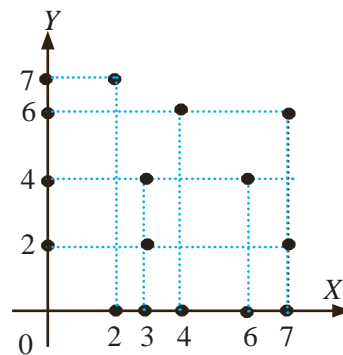
- Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari relasi-relasi berikut.

a)



- Relasi yang dinyatakan dengan pasangan terurut:  $\{(Yaska, Nora), (Riwanti, Glorista), (Felix, Krisantus), (Ramsida, Dahniar)\}$

c)

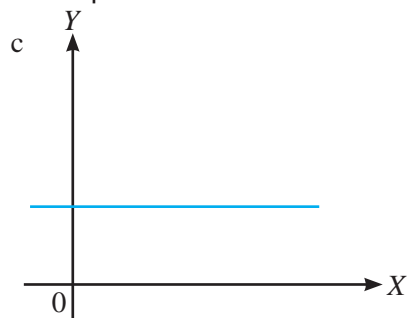
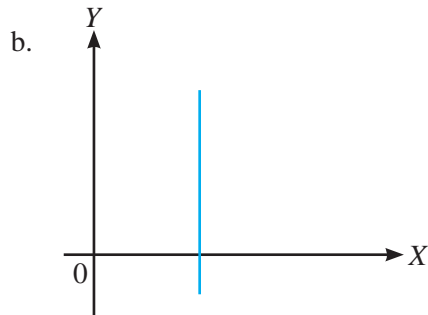
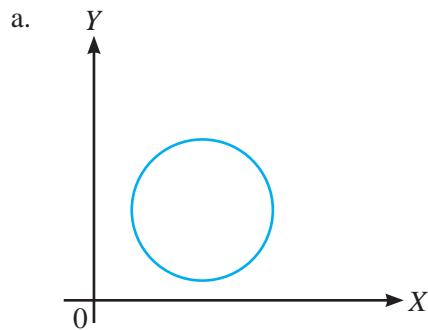


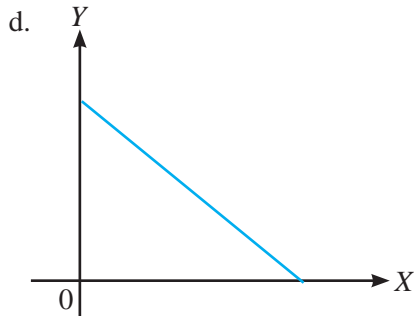
- Sekumpulan anak yang terdiri atas 5 orang yaitu: Siti, Beni, Dayu, Joko, dan Tono berturut-turut berusia 6, 7, 9, 10, dan 11 tahun. Pasangkanlah usia tiap-tiap anak pada bilangan prima yang kurang dari 15. Apakah semua anak dapat dipasangkan? Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasilnya!





3. Diberikan himpunan  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  dan himpunan  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$ . Nyatakanlah relasi  $A$  terhadap  $B$  dengan rumus berikut.
- $b = a + 1, a \in A \text{ dan } b \in B.$
  - $b = 2a + 2, a \in A \text{ dan } b \in B.$
- Kemudian periksa apakah relasi yang terbentuk adalah fungsi atau tidak, jelaskan
4. Diketahui himpunan  $A = \{1, 2, 3, 6\}$  dan  $B = \{2, 3, 6, 12\}$
- Gambarlah diagram panah dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  yang menunjukkan relasi 'faktor dari'.
  - Nyatakanlah hubungan itu dengan himpunan pasangan terurut dan grafik kartesius
5. Diketahui himpunan  $P = \{1, 2, 3, 4\}$  dan  $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Bila relasi dari  $P$  ke  $Q$  adalah 'kurangnya 1 dari', apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Jelaskan dan gambarlah relasi tersebut dalam diagram panah.
6. Diketahui fungsi  $f(x) = 2x + 1$  dengan daerah asal  $\{x \mid -3 \leq x \leq 2, x \text{ bilangan bulat}\}$ , tentukanlah.
- Daerah asal dengan mendaftar anggotanya satu persatu.
  - Daerah hasil.
  - Nyatakanlah fungsi tersebut dengan diagram panah, pasangan terurut, dan grafik kartesius
7. Jika siswa direlasikan dengan tanggal kelahirannya. Apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Berikan penjelasanmu!
8. Perhatikan gambar berikut! Manakah yang merupakan fungsi, jika daerah asalnya merupakan sumbu  $X$ ?





9. Diketahui fungsi  $f(x) = \frac{8}{5-x}$  dengan  $x \neq 5$ . Tentukanlah
- $f(1)$
  - $f(-3)$
  - $f(7)$
  - Nilai  $x$  jika  $f(x) = 2$
  - Nilai  $a$ , jika  $f(a) = 0,5$
10. Diketahui rumus fungsi  $f(x) = ax + b$ . Jika  $f(3) = 15$  dan  $f(-2) = 10$ , tentukanlah.
- Nilai  $a$  dan  $b$
  - Rumus fungsi  $f(x)$
  - Nilai  $f(7)$
11. Jika  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ , maka untuk  $x \neq 1$  tentukanlah  $f(-x)$ .
12. Jika  $y = \frac{x-1}{2x+1}$ ,  $x \neq -\frac{1}{2}$ , tuliskanlah  $x$  sebagai fungsi  $y$ . Kemudian tentukanlah syarat kedua fungsi tersebut agar terdefinisi untuk setiap  $x, y$  bilangan real.
13. Diketahui  $f(2x-3) = 4x-7$ , maka nilai dari  $f(17) - f(7)$  adalah ....
14. Bila  $f(x) = \frac{x}{a} \left[ 1 - \frac{b^2}{x^2} \right] + \frac{x}{b} \left[ 1 - \frac{a^2}{x^2} \right]$ , maka  $f(a+b)$  adalah ....
15. Misalkan  $f(n)$  didefinisikan kuadrat dari penjumlahan digit  $n$ . Misalkan juga  $f^2(n)$  didefinisikan  $f(f(n))$  dan  $f^3(n)$  didefinisikan  $f(f(f(n)))$  dan seterusnya. Tentukan  $f^{1998}(11)$ .
16. Diketahui fungsi  $f$  dengan rumus  $f = \sqrt{\frac{1}{2}x - 8}$ . Tentukanlah domain fungsi  $f$  agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.



## Projek

Rancanglah sebuah masalah terkait lintasan seekor lebah yang terbang terkadang naik, bergerak lurus dan terkadang turun pada saat waktu tertentu. Jika lintasan lebah tersebut merupakan fungsi, buatlah interval saat kapan lebah tersebut bergerak naik, lurus, dan saat turun. Buatlah hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.



#### D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada Bab 5 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bab bahasan berikutnya, disajikan sebagai berikut.

1. Setiap relasi adalah himpunan. Tetapi sebuah himpunan belum tentu merupakan relasi.
2. Setiap fungsi merupakan relasi. Tetapi sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi.
3. Dari pernyataan (1) dan (2) disimpulkan bahwa setiap fungsi dan relasi adalah himpunan.
4. Relasi memiliki sifat, antara lain (1) reflektif, (2) simetris, (3) transitif, dan (4) sifat antisimetris. Jika sebuah relasi memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif, maka relasi tersebut dikatakan relasi ekuivalen.
5. Fungsi adalah bagian dari relasi yang memasangkan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain. Fungsi yang demikian disebut juga pemetaan.
6. Untuk lebih mendalami materi fungsi kamu dapat mempelajari berbagai jenis fungsi pada sumber belajar yang lain, seperti fungsi naik dan turun, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi injektif, surjektif, fungsi satu-satu, dan sebagainya.

Materi selanjutnya adalah barisan dan deret. Barisan adalah sebuah fungsi dengan domain bilangan asli dan daerah hasilnya adalah suatu himpunan bagian dari bilangan real. Jadi pengetahuan kamu tentang relasi dan fungsi sangat menentukan keberhasilan kamu menguasai berbagai konsep dan aturan dalam barisan dan deret.

[illegible]