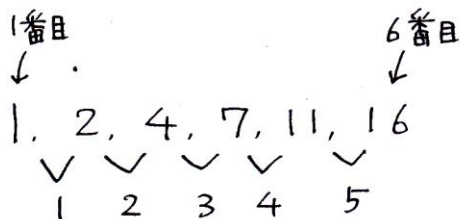


必修例題 1

下のように、あるきまりにしたがって整数を並べました。

1, 2, 4, 7, 11, 16, ……

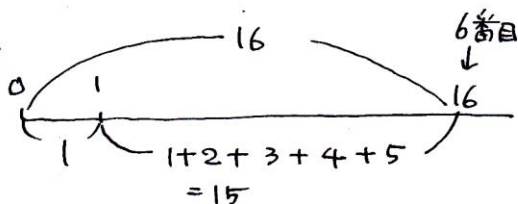
この数列の15番目の数はいくつですか。



前の数と次の数の差が決まった数ではないので等差数列ではありません。

(これは) 1列えは「6番目の数の16は

$1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ となります。
 ↑ 1番目の数
 5個
 $6 - 1 = 5$ (間の数)



15番目の数までの間の数は

$$15 - 1 = 14 \text{ (個)}$$

したがって

1から14までの和

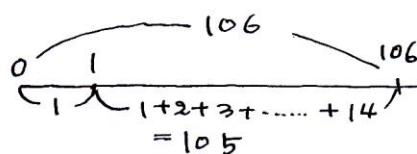
$$1 + (1 + 2 + 3 + \dots + 14)$$

$$= 1 + (1 + 14) \times 14 \div 2$$

ガウスの計算

$$= 1 + 105$$

$$= 106$$



106

(復習)

ガウスの計算

はじめの数

14個

$$1 + 2 + 3 + \dots + 14$$

$$+ 14 + 13 + 12 + \dots + 1$$

$$15 + 15 + 15 + \dots + 15$$

おわりの数

2列足して
↓ 113の2

$$(はじめの数 + おわりの数) \times \text{個数} \div 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$$

$$(1 + 14) \times 14 \div 2 = 105$$

必修例題 2

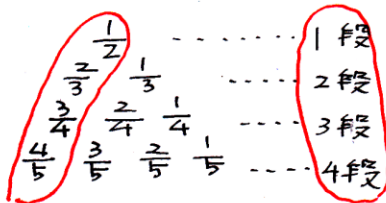
下のように、あるきまりにしたがって分数を並べました。

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \dots$

- (1) $\frac{3}{10}$ は何番目の分数ですか。
 (2) 100番目の分数はいくつですか。

(1)

分母の数字の個数で、ピラミッド型に並べてみます。



左側に並んだ分数をみると
 1段目は $\frac{1}{2}$, 2段目は $\frac{2}{3}$, 3段目は $\frac{3}{4}$ で
分子の数と段目の数が同じです。

また分母は分子に1をたした数です。

したがって、 $\frac{9}{10}$ は 9段目で

$\frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}$

となるので 左から7番目の分数
 とわかります。

まず8段目までの分数の個数を求めます。

$1+2+3+4+5+6+7+8$ なので

$$(1+8) \times 8 \div 2 = 36 \text{ (個)}$$

9段目に7個ありますから

$$36+7=43 \text{ (個)}$$

↓
 43番目となります。

43番目

(2)

100番目(個目)の分数が何段目にあるかを調べます。

$$1+2+3+\dots+13$$

$$= (1+13) \times 13 \div 2$$

$$= 91 \dots \dots \text{13段目までの個数。}$$

$$91+9=100 \text{ より}$$

100番目の分数は

14段目の左から9つ目です。

14段目の一番左の分数は $\frac{14}{15}$ ですから。

$\frac{14}{15}, \frac{13}{15}, \frac{12}{15}, \frac{11}{15}, \frac{10}{15}, \frac{9}{15}, \frac{8}{15}, \frac{7}{15}, \frac{6}{15}$

$\frac{6}{15}$ になります。

↑
 左から9つ目

$\frac{6}{15}$

必修例題 3

3と4の倍数を除いた数を小さい順に並べると、下のようになります。

1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, ……

- (1) 58は何番目の数ですか。
- (2) 99番目の数はいくつですか。

① ② 3 4 ⑤ 6 ⑦ 8 9 ⑩ ⑪ 12
⑬ ⑭ 15 16 ⑰ 18 ⑱ 20 21 ②② ②③ 24

上の図からわかるように、3と4の最小公倍数の12が周期になっていて、その中に6個の○が入っています。

また、
 $13 \div 12 = 1$ あまり ①
 $14 \div 12 = 1$ あまり ②
 $17 \div 12 = 1$ あまり ⑤
 $19 \div 12 = 1$ あまり ⑦
 $22 \div 12 = 1$ あまり ⑩
 $23 \div 12 = 1$ あまり ⑪

のように、この数列に並べて(いる)数を、12で割ると、その余りは

$\{1, 2, 5, 7, 10, 11\}$ の周期になって

いることがわかります。

(1) $58 \div 12 = 4$ あまり ⑩

4周期 + 5周期目の左から5番目

1つの周期に6個の数字があるから、

$$6 \times 4 + 5 = 29 \text{ (番目)}$$

29番目

(2) 99番目ということは99個目の○です。

$99 \div 6 = 16$ あまり 3 より
 16周期 + 次の左から3つ目の○です。

1つの周期は12のかたまりですから

$$12 \times 16 = 192$$

そのあとは

⑬③ ⑬④ 195, 196, ⑬⑦, 198, 199…

197

必修例題 4

右のように、あるきまりにしたがって数を並べました。

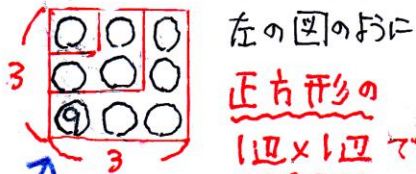
- (1) 120は何段目の左から何番目にありますか。
 (2) 5段目の左から9番目の整数はいくつですか。

1段目	1	2	5	10	17
2段目	4	3	6	11	18
3段目	9	8	7	12	...
4段目	16	15	14	13	...
5段目	...	...	...	...	...

	1組	2組	3組	4組	5組
1段目	①	2	5	10	17
2段目	④	3	6	11	18
3段目	⑨	8	7	12	...
4段目	⑬	15	14	13	...
5段目	...	...	...	...	...

上の図のように、組に分けて考えると、各組の最後の数 (1, 4, 9, 16, ...) は 平方数 になっていきます。

これは、例えば $1+3+5=9$ で、
 3組までの数字の個数は



左の図のように

正方形の

1×1 で求めることができます。

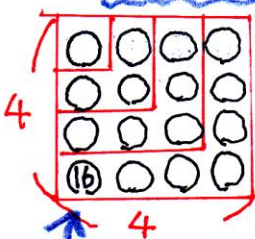
平方数とは

同じ数を2回かけて
 できる数です。

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \dots$$

したがって、3組の最後の数は
 $3 \times 3 = 9$ になります。

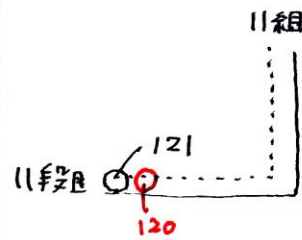
同様に4組までの数字の個数は
 $1+3+5+7=16$ で、図のように



$4 \times 4 = 16$ の正方形

の面積で求めることができます。

- (1) $10 \times 10 = 100$ 、 $11 \times 11 = 121$ より



121は11組の最後の
 の数で、120はその
 1つ前の数

↓
11段目の左から2番目

11段目の左から2番目

- (2) 5段目の左から9番目の数は
 ↓
9組の上から5番目の数です。

下の図のように、8組の最後の数は

$$8 \times 8 = 64 \text{ なので}$$

9組は65から始まりますから
 上から5番目の数は 69 です。

						8組	9組
1 段目	1	2	5	10	17	○	○ 65
2 段目	4	3	6	11	18	○	○
3 段目	9	8	7	12	...	○	○
4 段目	16	15	14	13	...	○	○
5 段目						→	69
6							
7							
8 段目	←						64
9 段目							

69

右のように、あるきまりにしたがって数を並べました。これについて、次の問いに答えなさい。

- (1) 95は何段目の左から何番目にありますか。
- (2) 15段目の一番左にある整数はいくつですか。
- (3) 8段目の左から10番目の整数はいくつですか。

1段目	1	2	4	7	11	...
2段目	3	5	8	12	...	
3段目	6	9	13	...		
4段目	10	14	...			
5段目	15	...				

(1)

	1組	2組	3組	4組	5組	
1段目	1	2	4	7	11	...
2段目	3	5	8	12	...	
3段目	6	9	13	...		
4段目	10	14	...			
5段目	15	...				

上のよりに区切って考えます。

例えば3組の最後の数は1組~3組の数字の個数ですから

$$1 + 2 + 3 = 6 \text{ になります。}$$

↑
3段目のはじめの数。

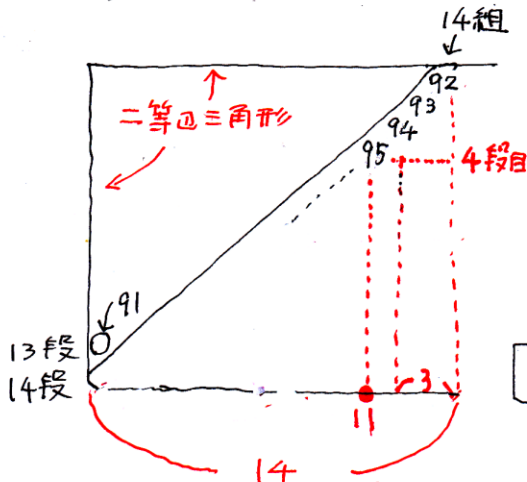
95は95個目の数です。

$$1 + 2 + 3 + \dots + 13 = 91$$

$$95 = (1 + 2 + 3 + \dots + 13) + 4$$

↑ ↑
13組 14組目

14組目の上から4段目が求める位置です。



95は右から4個目で左から

$$14 - 3 = 11 \text{ (番目)}$$

$$(14 - 4 + 1 = 11 \text{ でもよい})$$

4段目の11番目

(2)

例えば3段目の一番左にある数は3組目までの数字の個数の和ですから

15段目の一番左にある数は

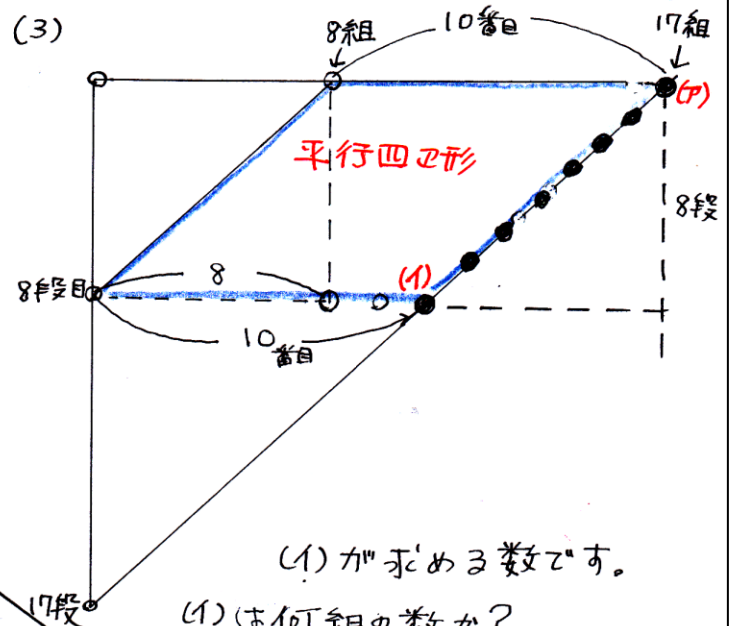
$$1 + 2 + 3 + \dots + 15$$

$$= (1 + 15) \times 15 \div 2$$

$$= 120$$

120

(3)



(1)が求める数です。

(1)は何組の数か？

8組から10番目であらう

$$8 + 10 - 1 = 17 \text{ 組です。}$$

16組の最後の数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + 16 = 136 \text{ より}$$

17組の最初の数は137です。

上から8段目(81個目)ですから

137. 138. 139. 140. 141. 142.

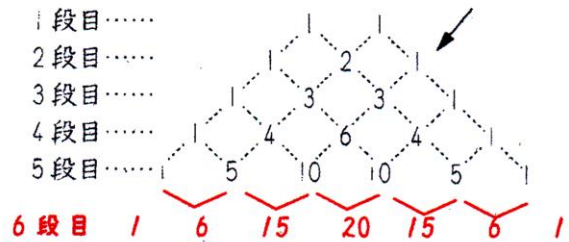
143. 144 となります。

$$136 + 8 = 144 \text{ でしょう。}$$

144

右の図のように、あるきまりにしたがって数を並べます。

- (1) 6 段目の数を左から順に答えなさい。
- (2) 8 段目に並ぶ数の和を求めなさい。
- (3) 図の矢印の部分には、1 番目が 1、2 番目が 3、3 番目が 6、…のように数が並んでいます。100 番目に並ぶ数を求めなさい。



(1) 両端の 1 以外は上の 2 つの数字の和が下の数字になります。

6 段目は上の図のようになりますから左から、1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 です。

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

(2) 6 段目

7 段目

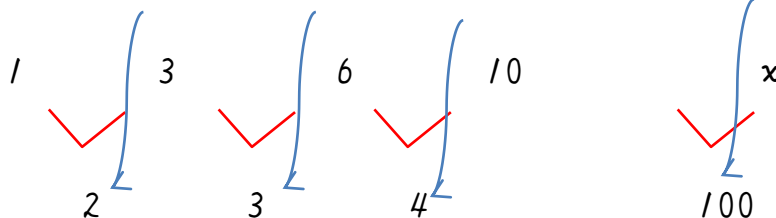
8 段目

したがって、求める和は、

$$(1+8+28+56) \times 2 + 70 = 256$$

256

(3) 1 番目 2 番目 3 番目 4 番目 ... 100 番目



例えば、4 番目の 10 は $1+(2+3+4)=1+2+3+4=10$ となります。

したがって、100 番目並ぶ数は、

$$1+2+3+\dots+100=(1+100) \times 100 \div 2$$

$$=10 \times 50$$

$$=5050$$

5050