物理量因次

2017年3月6日　　下午 10:18

$[v]=[\mu^x F^y] \Rightarrow LT^{-1}=(ML^{-1})^x(M \cdot LT^{-2})^y$

$LT^{-1}=M^{x+y}L^{-x+y}T^{-2y}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \\ -x+y=1 \\ -2y=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow v=\mu^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$

$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

ML^{-1}　ma

範例：

$\mu=\frac{M}{L}$

1. 繩波的波速 v 與繩子的線密度（單位長度所含之質量）μ、繩子的張力 F 有關，利用因次分析，則下列何者可能為繩波波速的公式？

(A) $v=\mu F$　(B) $v=\mu F^2$　(C) $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$　(D) $v=\sqrt{\mu F}$　(E) $v=\sqrt{\frac{\mu}{F}}$。

d

2. 欲瞭解聲波如何在金屬中傳播，可利用簡化的一維模型：將金屬原子視為質量 m 的小球，以間距 d 排列成一直線，且相鄰兩個小球間以力常數 k 的彈簧連結，藉以模擬原子間的作用力。在此簡化模型的假設下，應用因次分析來判定，下列何者可能為金屬中的聲速？（105 指考）

(A) $d\sqrt{k/m}$　(B) $d\sqrt{mk}$　(C) $\sqrt{dm/k}$　(D) dk/m　(E) mk/d

$[v]=[m^x d^y k^z]$　$x=-\frac{1}{2}$ $y=1$, $z=\frac{1}{2}$

5-3 物理量的因次

1、物理學中定義了各種物理量（physical quantity），如長度、質量、時間、溫度、動能……等。這些物理量包含「數值」及「單位」。單位的選用和所討論的主題有關。例如 2：公尺、毫米、奈米、天文單位（astronomical unit，記為 AU）、光年均為長度的單位，我們說它具有相同的因次（dimension）。

3. 物理量可分為基本量和導出量兩種。1971 年國際度量衡大會選定的國際單位制（system international，SI），又稱公制單位系統），為全球科學工作者普遍採用。此系統包含七個物理量之基本單位（詳見高一翰林版基礎物理㈠第 1 章）。而 4. 在力學中的三個基本量為：長度（m）、質量（kg）和時間（s）。並將這三個基本量的因次，分別以〔L〕、〔M〕、〔T〕表示。力學中所有的物理量都可以由這三個基本量導出。例如：加速度的單位為 m / s^2，而加速度的因次可寫為〔a〕＝〔L〕^{1}〔T〕$^{-2}$。其他物理量均可表為〔L〕^{a}〔M〕^{b}〔T〕^{c}。

另外，弧度為對應弧長和半徑的比值，比重為和水同體積時，該物質和水兩者質量（或重量）的比值。所以，弧度和比重沒有因次（dimensionless）。下頁表 5-3 列出力學中一些物理量的因次。

$[v]=LT^{-1}=[L][T]^{-1}$

$[a]=LT^{-2}$

m/s²

5. 因次分析.

①在分析物理量的關係和檢視方程式是否合理時，因次的概念非常有用，因次②可視為代數運算，正確的方程式中之每一項必定具有相同的因次。例如：等加速運動公式中

ex:
$$[S]=\left[\frac{1}{2}at^2\right]$$

$$L \qquad LT^{-2}T^{2}=L$$

方程式左邊的因次為 $[L]^1$

方程式右邊的因次為 $[a][t^2]=([L]^1[T]^{-2})([T]^2)=[L]^1$

方程式左、右兩邊的因次相同，表示如果 S 只與 a 及 t 有關，則 $S \propto at^2$ 為正確的形式；至於 $\frac{1}{2}$ 是數字，無因次概念，故無法用因次分析來檢驗。

同樣，在翰林版高中基礎物理(一)課本第 7 章裡，功的定義為

ex:
$$W=FS$$

此物理量的因次為

$$[\mathrm{N}][\mathrm{m}]=([L]^1[M]^1[T]^{-2})[L]^1=[L]^2[M]^1[T]^{-2}$$

另一方面，動能的因次為

$$[\mathrm{kg}][v^2]=([M])([L]^2[T]^{-2})=[L]^2[M]^1[T]^{-2}$$

所以，功與動能為具有相同因次的物理量，可作加減或轉換運算。此外，如動能與位能的關係也為具有相同因次的物理量。

▼ 表 5-3　物理量的因次

1 g/cm³

物理量	SI 單位制	因　次
長　度	m	$[L]^1$
質　量	kg	$[M]^1$
時　間	s	$[T]^1$
速　度	m / s	$[L]^1[T]^{-1}$
加速度	m / s²	$[L]^1[T]^{-2}$
角速率　$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	1 / s	$[T]^{-1}$
力	kg · m / s²（=N）	$[L]^1[M]^1[T]^{-2}$
力矩（註 3）	kg · m² / s²（=N · m）	$[L]^2[M]^1[T]^{-2}$
功	kg · m² / s²（=J）	$[L]^2[M]^1[T]^{-2}$
功　率	kg · m² / s³（=W）	$[L]^2[M]^1[T]^{-3}$
動　能	kg · m² / s²（=J）	$[L]^2[M]^1[T]^{-2}$

註 3　力矩、功與動能的因次雖然相同，但力矩這個物理量與另兩個物理量不同。

$[F]=[ma]$
$=M\cdot LT^{-2}$

$[\tau]=[rF]$
$=ML^2T^{-2}$

$[W]=[FS]$
$=ML^2T^{-2}$

$[K]=[\frac{1}{2}mv^2]$
$=ML^2T^{-2}$

$[P]=[\frac{W}{t}]$
$=ML^2T^{-3}$

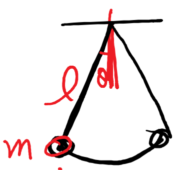
ex: SHM. $F=-kx$

$T=2\pi\cancel{\sqrt{\frac{k}{m}}}$?　$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$T \qquad \left[\sqrt{\frac{k}{m}}\right]=\left[\frac{F/x}{m}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}x}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[LT^{-2}L^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}=T^{-1}$$

ex: 小角度單擺　$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

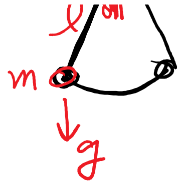
$[T]\propto[m^x\ell^y g^z]$



$$[T]\propto[m^x \ell^y g^z]$$

$$T = M^x L^y (LT^{-2})^z$$

$$T = M^x L^{y+z} T^{-2z}$$



$$\left.\begin{aligned} x&=0 \\ y+z&=0 \Rightarrow y=\tfrac{1}{2} \\ -2z&=1 \Rightarrow z=-\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$T\propto m^0 \ell^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$$

$$T\propto\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}\frac{GMm}{r}}$$

$$\cancel{\sqrt{\frac{GMm}{r}}}$$