Capítulo

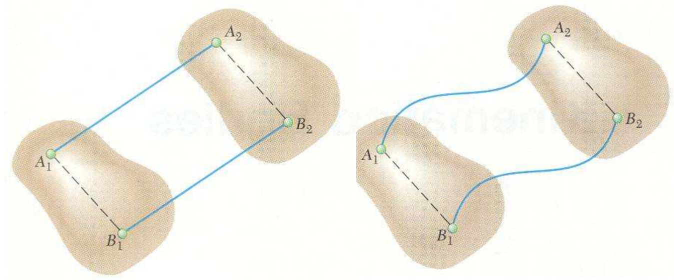
1

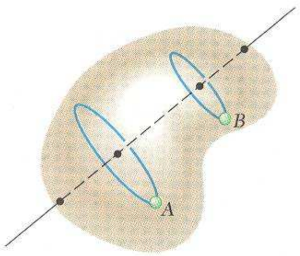
Cinemática del Sólido Rígido

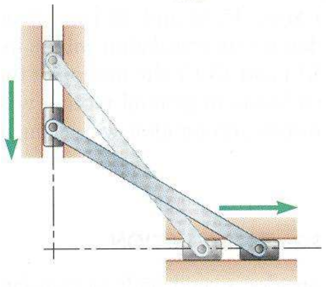
Contenido

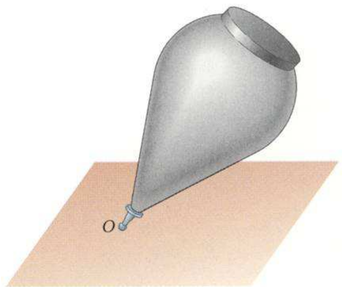
- Introducción
- Traslación
- Rotación alrededor de un Eje Fijo. velocidad
- Rotación alrededor de un Eje Fijo: aceleración
- Rotación alrededor de un Eje Fijo: Sección representativa
- Ecuación que define la rotación alrededor de un eje fijo.
- Sample Problem 5.1
- Movimiento Plano General
- Vecidad absoluta y relativa en movimiento plano
- Sample Problem 15.2
- Sample Problem 15.3
- Centro Instantáneo de rotación en movimiento plano
- Sample Problem 15.4
- Sample Problem 15.5
- Aceleración absoluta y relativa en movimiento plano
- Analisis del movimiento plano en función de un parámetro
- Sample Problem 15.6
- Sample Problem 15.7
- Sample Problem 15.8
- Rate of Change With Respect to a Rotating Frame
- Coriolis Acceleration
- Sample Problem 15.9
- Sample Problem 15.10
- Movimiento alrededor de un punto Fijo
- Movimiento General
- Sample Problem 15.11
- Three Dimensional Motion. Coriolis Acceleration
- Frame of Reference in General Motion
- Sample Problem 15.15

Introducción



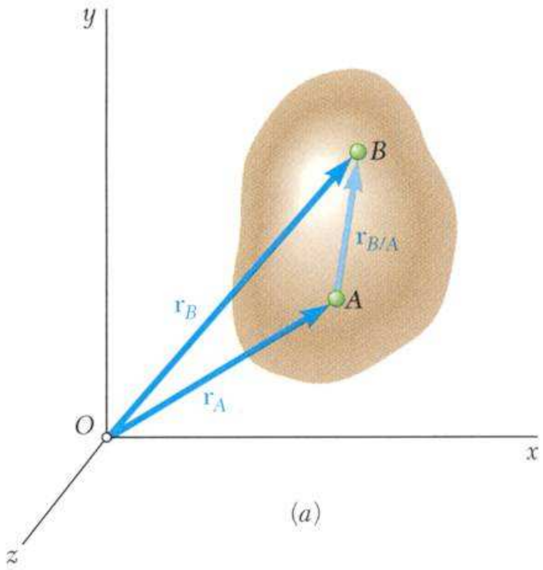




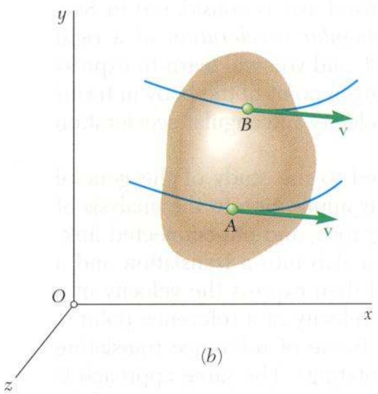


- Cinemática de cuerpos rígidos: relaciones entre tiempo, posición, velocidades, y aceleraciones de partículas que forman un sólido rígido.
- Clasificación del movimiento de los sólidos rígidos:
  - traslación:
    - Traslación rectilínea:
    - Traslación curvilínea
  - Rotación alrededor de un eje fijo
  - Movimiento plano general
  - Moviento alrededor de un punto fijo
  - Movimiento general

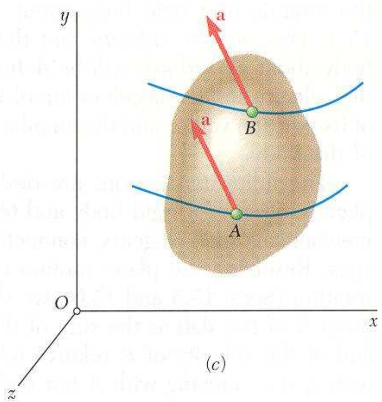
Traslación



(a)



(b)



(c)

- Considere un sólido rígido en traslación:
  - La dirección de cualquier línea recta en el interior del sólido permanece constante.
  - Todas las partículas que forman parte del sólido se mueven en líneas paralelas.

- Para dos partículas cualesquiera del sólido,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

- Derivando respecto al tiempo,

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{B/A} = \dot{\vec{r}}_A$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

Todas las partículas tienen igual velocidad.

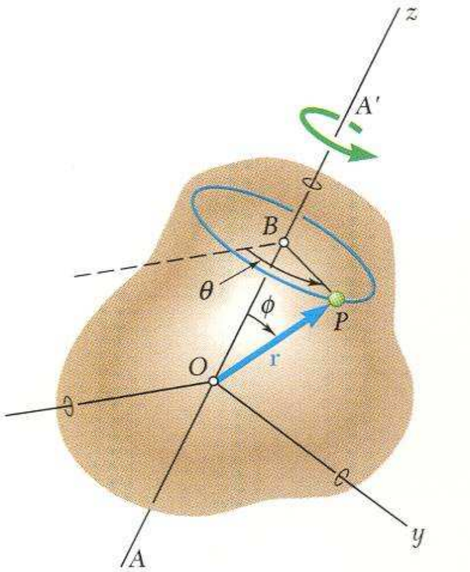
- Derivando respecto al tiempo,

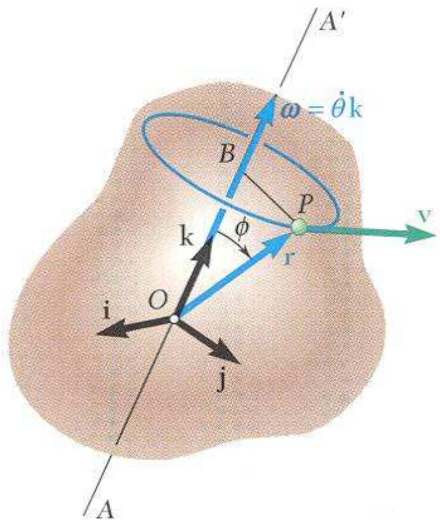
$$\ddot{\vec{r}}_B = \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{r}}_{B/A} = \ddot{\vec{r}}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Todas las partículas tienen igual aceleración.

Rotación alrededor de un eje fijo. Velocidad





- Considere la rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo AA'
- La Velocidad $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ de la partícula P es tangente a la trayectoria con: $v = ds/dt$

$$\Delta s = (BP)\Delta\theta = (r\sin\phi)\Delta\theta$$

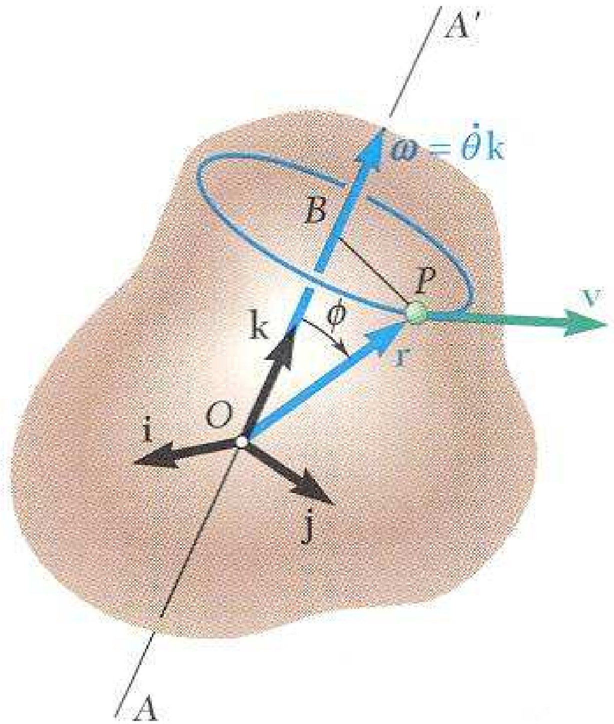
$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}(r\sin\phi)\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\dot{\theta}\sin\phi$$

- El mismo resultado se obtiene con:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k} = angular\ velocity$$

Rotación alrededor de un eje fijo. Aceleración



- Derivando con respecto al tiempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$
$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$$

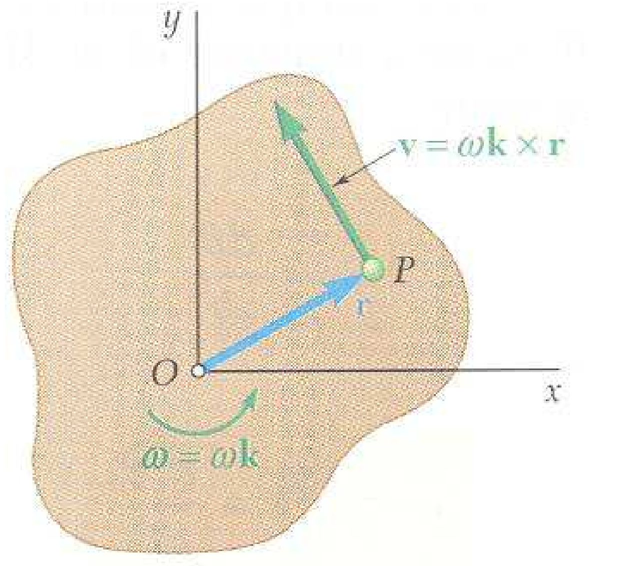
- $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} = \textit{angular acceleration}$

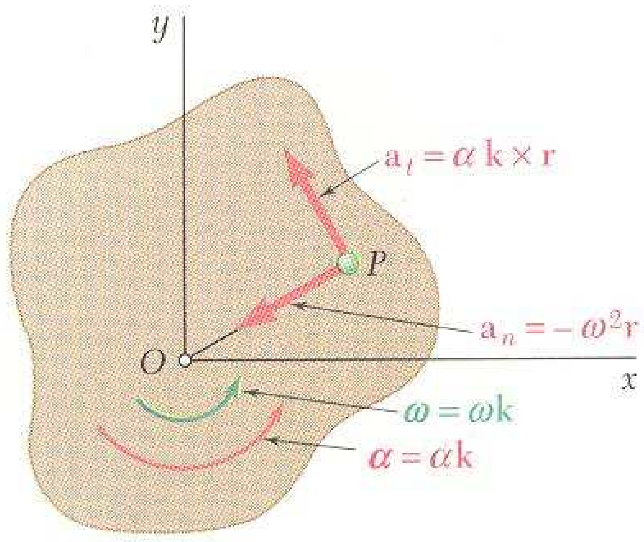
$$= \alpha\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{k}$$

- La aceleración de P es combinación de dos vectores.

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$
$$\vec{\alpha}\times\vec{r} = \text{tangential acceleration component}$$
$$\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \text{radial acceleration component}$$

Rotación alrededor de un Eje Fijo. Sección representativa





- Considere el movimiento de una sección representativa en un plano perpendicurlar al eje de rotación.
- La velocidad de cualquier punto P de la sección

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{k} \times \vec{r}$$

$$v = r\omega$$

- La aceleración de cualquier punto P

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

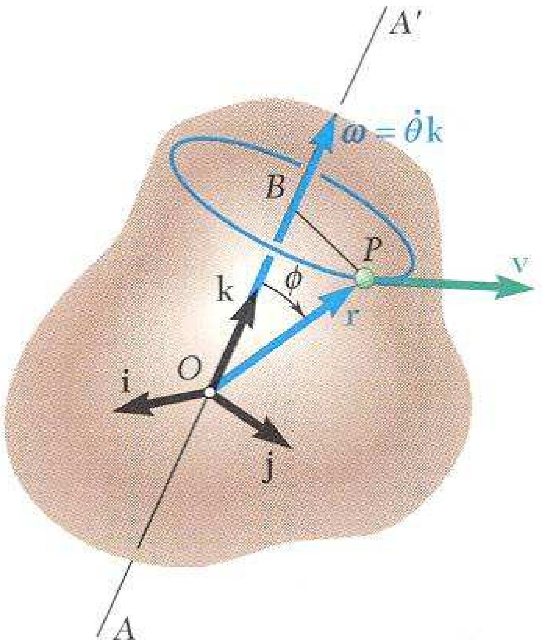
$$= \alpha \vec{k} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

- Descomponiendo la aceleración en su componete tangencial y normal,

$$\vec{a}_t = \alpha \vec{k} \times \vec{r} \qquad a_t = r\alpha$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \qquad a_n = r\omega^2$$

Ecuaciones que definen el giro de un Sólido Rígido alrededor de Ejes Fijos



- El movimiento de un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo depende a menudo del tipo de aceleración.
- Si $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ or $dt = \dfrac{d\theta}{\omega}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

- *Rotación Uniforme*, $\alpha = 0$:

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

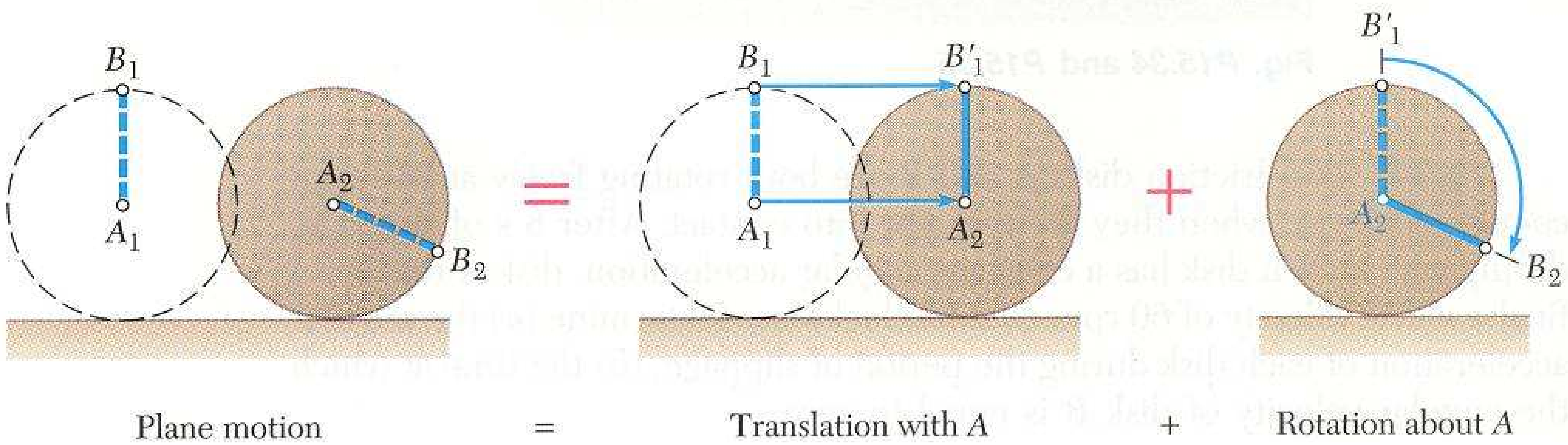
- *Rotación uniformemente acelerada*, α = constant:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

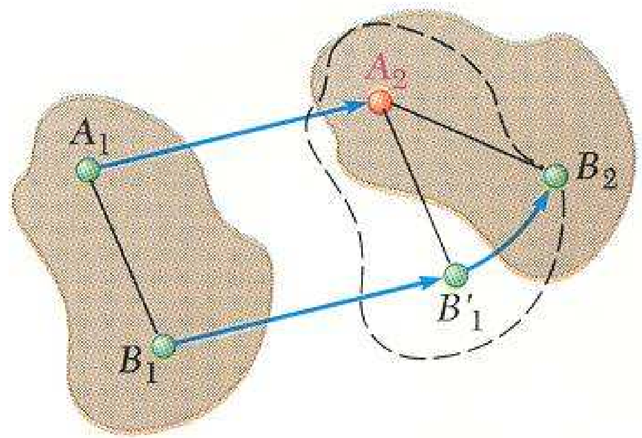
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

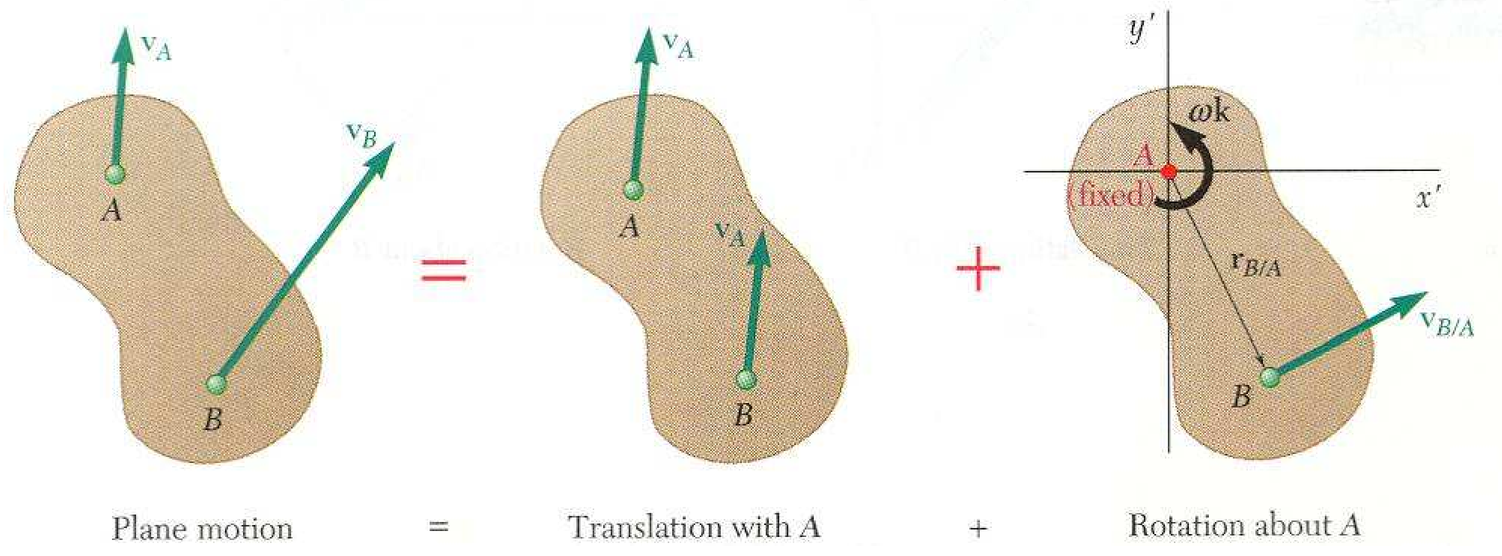
Movimiento Plano General

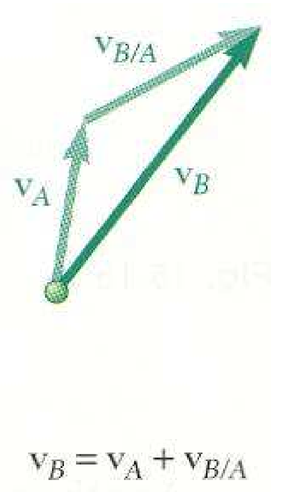


- *Movimiento plano general no es traslación o rotación.*
- Movimiento plano general se considera la suma de traslación y rotación.
- El desplazamiento de las partículas A y B a A_2 and B_2 se puede efectuar en dos pasos:
  - traslación a A_2 *y* B_1'
  - rotación de B_1' alrededor de A_2 a B_2



Velocidad Absoluta y Relativa en el Movimiento Plano





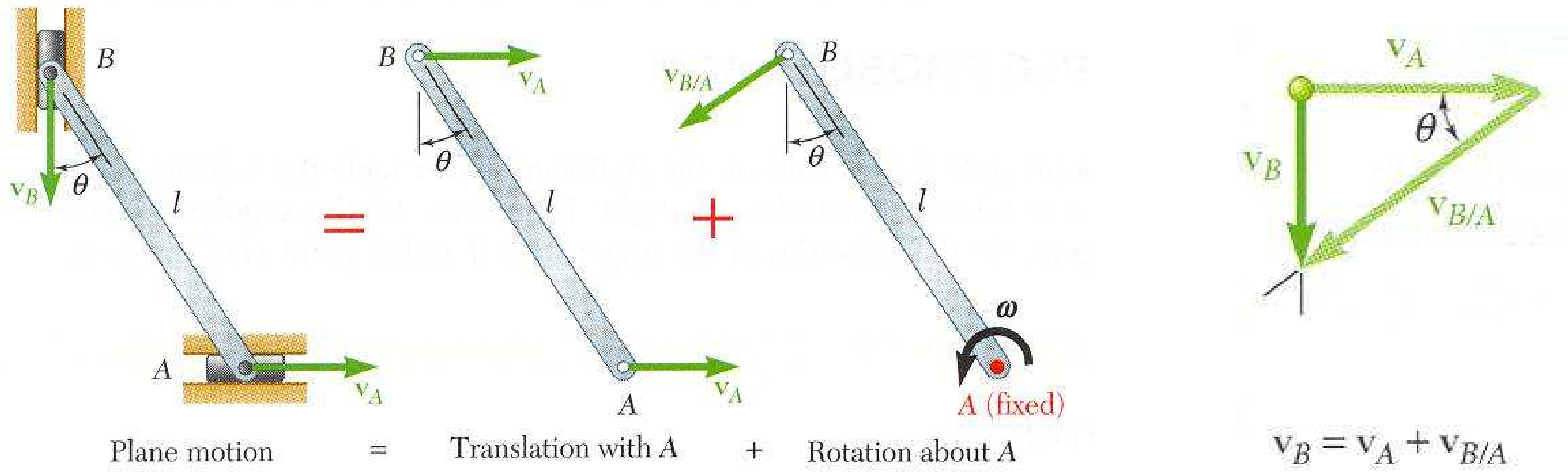
- Cualquier movimiento plano se puede descomponer en una traslación de un punto cualquiera A y de forma simultánea una rotación alrededor de A.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = \omega\vec{k} \times \vec{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \times \vec{r}_{B/A}$$

Velocidad Absoluta y Relativa en el Movimiento Plano

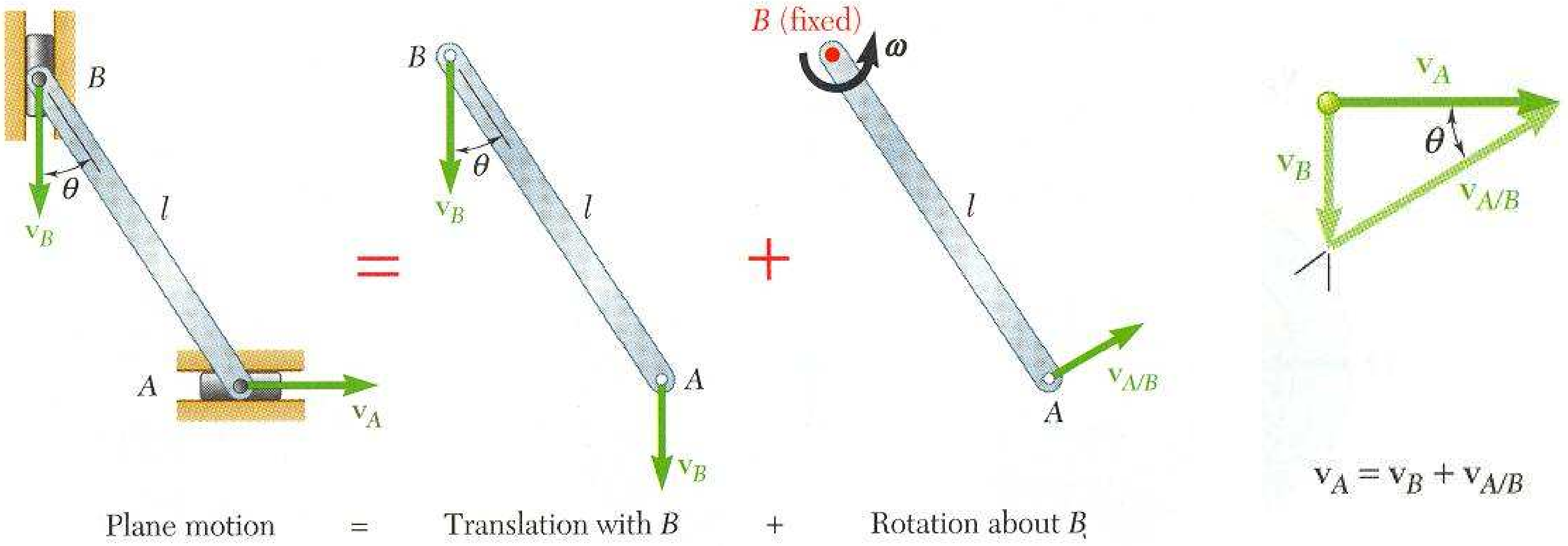


- Considerando que la velocidad v_A del extremo A es conocida, se desea determinar la velocidad v_B del extremo B y la velocidad angular ω en términos de v_A, l, y θ.
- La dirección de v_B y $v_{B/A}$ son conocidas y se completa el diagrama de velocidades

$$\frac{v_B}{v_A} = \tan\theta \qquad \frac{v_A}{v_{B/A}} = \frac{v_A}{l\omega} = \cos\theta$$

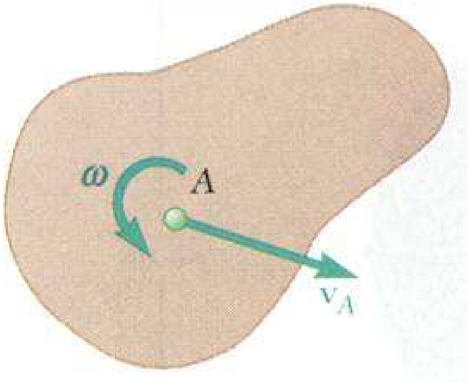
$$v_B = v_A \tan\theta \qquad \omega = \frac{v_A}{l\cos\theta}$$

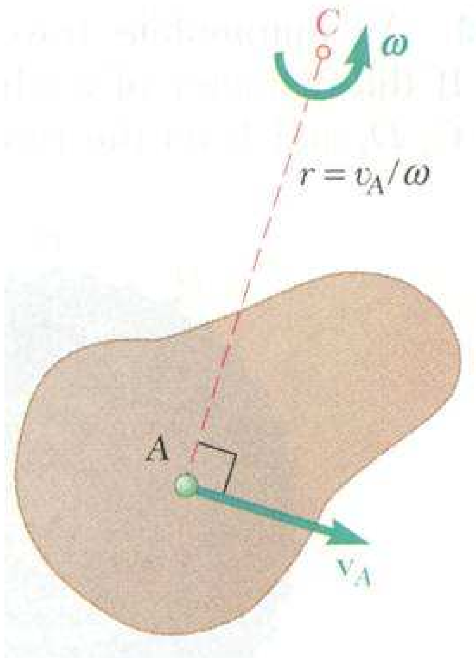
Velocidad Absoluta y Relativa en el Movimiento Plano



- Seleccionado el punto *B* como el punto de referencia y resolviendo para la velocidad v_A el extremo A y la velocidad angular se calculan a partir del triángulo de velocidades.
- $v_{A/B}$ tiene la misma magnitud y sentido contrario de $v_{B/A}$. El sentido de la velocidad relativa depende del punto de referencia elegido.
- La velocidad angular ω de la barra es para una rotación alrededor de *B* igual a la rotación alrededor de *A*. *La velocidad angular* no depende del punto de referencia elegido.

Centro Instantáneo de Rotación en el Movimiento Plano





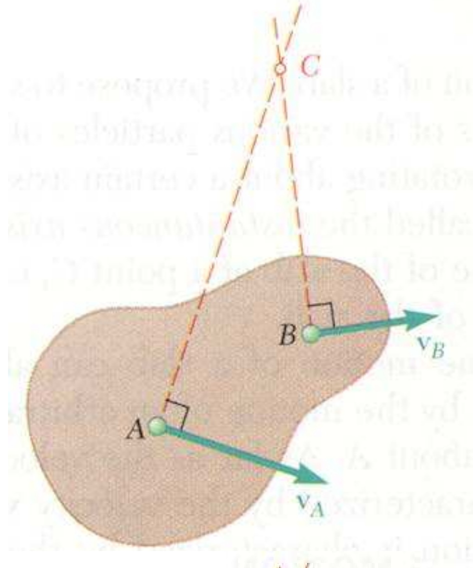
- El movimiento plano de todas las partículas en una sección siempre se puede sustituir por una traslación de un punto arbitrario y una rotación alrededor de A con una velocidad angular independiente de A.

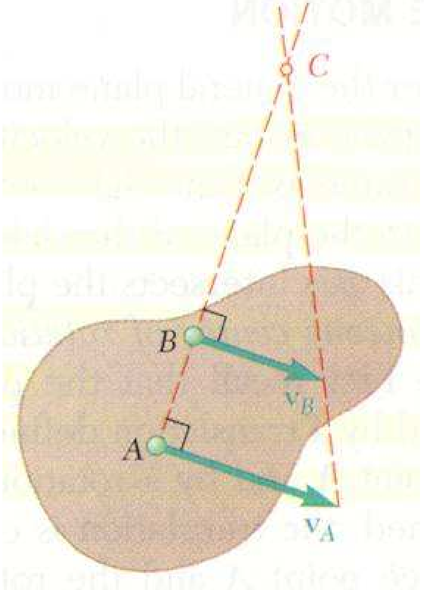
- El mismo resultado de la velocidad como suma de traslación y rotación alrededor de A se puede obtener permitiendo que la sección gire con la misma velocidad angular entorno al punto C que se encuentra sobre una perpendicular a la velocidad A.

- La velocidad de todas las partículas en la sección se pueden calcular de forma similar a la de A.

- De esta forma todas la sección parece girar en torno al punto C que se conoce como ***Centro Instantáneo de Rotación.***

Centro Instantáneo de Rotación en el Movimiento Plano





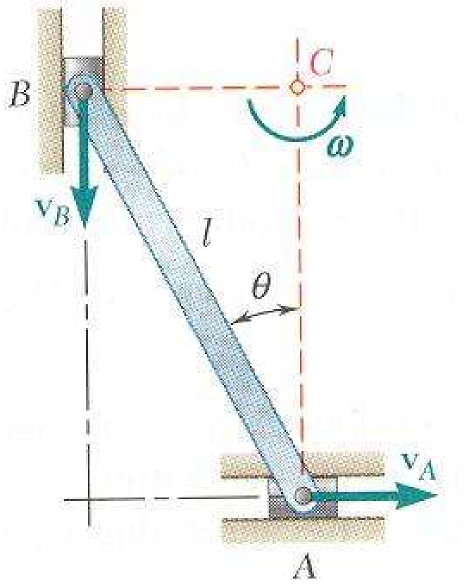
- Si se conoce la velocidad de dos punto A y B, el centro instantáneo de rotación se encuentra en la intersección de las perpendiculares a los vectores velocidad de dichos.

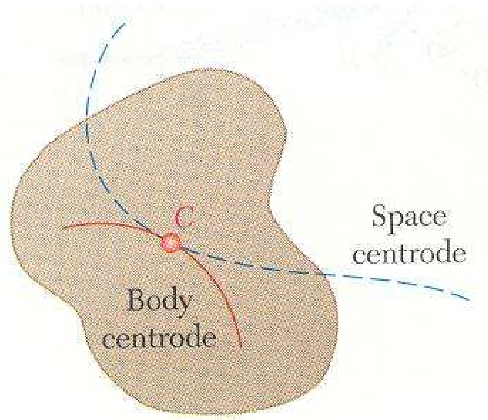
- Si los vectores velocidad son paralelos, el centro instantáneo se encontraría en el infinito y la velocidad angular sería cero.

- Si los vectores velocidad de *A* y *B* son perpendiculares, el centro instantáneo de rotación se encuentra en la intersección de las líneas que unen los extremos de las velocidades *A* y *B*.

- Si los vectores velocidad tienen igual, el centro instantáneo está en el infinito y la velocidad angular es cero.

Centro Instantáneo de Rotación en el Movimiento Plano





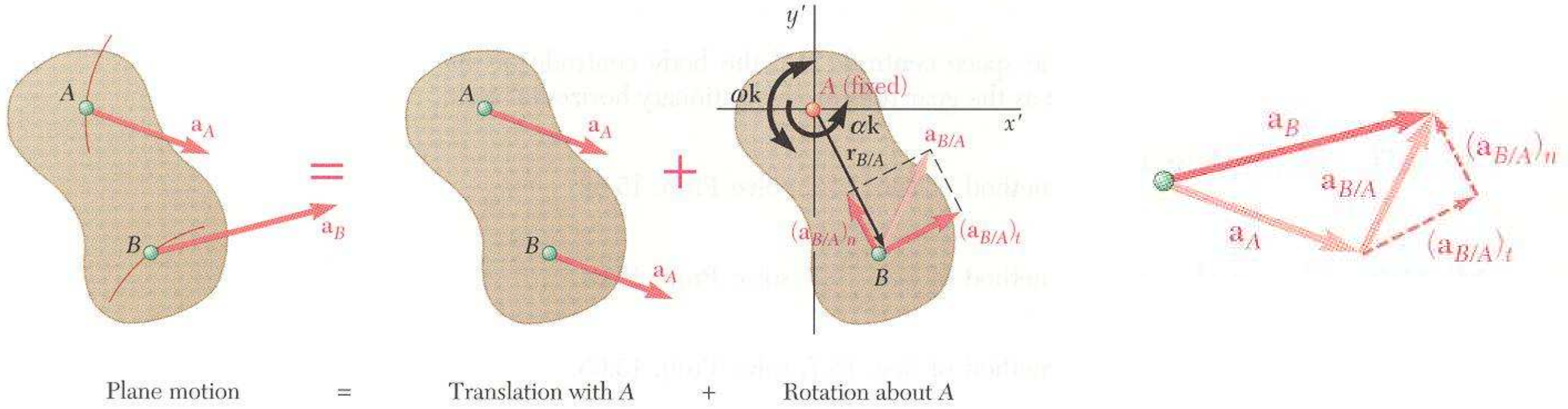
- El centro instantáneo de rotación se sitúa en la intersección de la perpendicular al vector velocidad que pasa por A y B

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l\cos\theta}$$

$$v_B = (BC)\omega = (l\sin\theta)\frac{v_A}{l\cos\theta}$$
$$= v_A\tan\theta$$

- La velocidad de todas las partículas de la barra es como sigirasen en torno a C.
- La partícula que pasa por el centro instantáneo tienen v=0.
- La partícula que coincide con el centro instantáneo de rotación cambia con el tiempo y la aceleración no es igual a cero.
- La aceleración de las partículas en la sección <u>no se puede</u> determinar como si giraran en torno a
- La trayectoria de la localización del centro instantáneo de rotación sobre el cuerpo es la curva Polar Móvil (ruleta) y en el espacio esl polarfija (base).

Aceleración Absoluta y Relativa en Movimiento Plano



- Aceleración absoluta de una partícula,

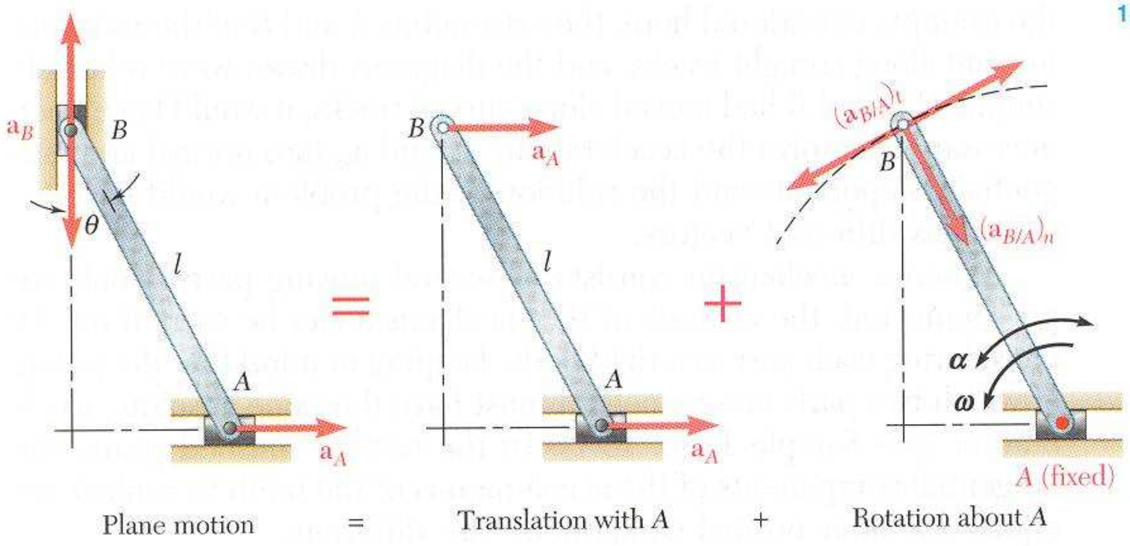
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

- Aceleración relativa $\vec{a}_{B/A}$ asociada con la rotación alrededor de A incluyendo las componentes tangenciales y normal.

$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t = \alpha\vec{k}\times\vec{r}_{B/A} \qquad \left(a_{B/A}\right)_t = r\alpha$$

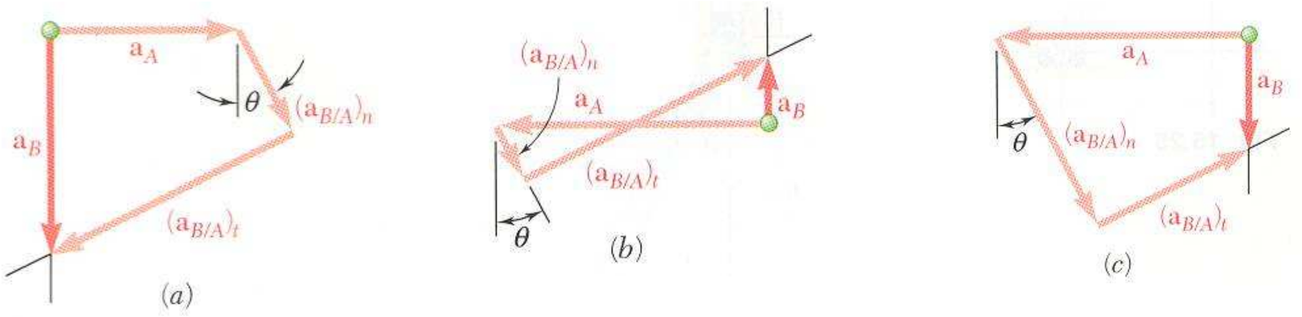
$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n = -\omega^2\vec{r}_{B/A} \qquad \left(a_{B/A}\right)_n = r\omega^2$$

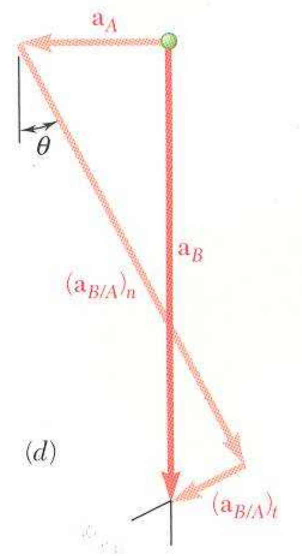
Aceleración Absoluta y Relativa en Movimiento Plano



- Dado $\vec{a}_A$ and $\vec{v}_A$, determinar $\vec{a}_B$ and $\vec{\alpha}$.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$
$$= \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t$$

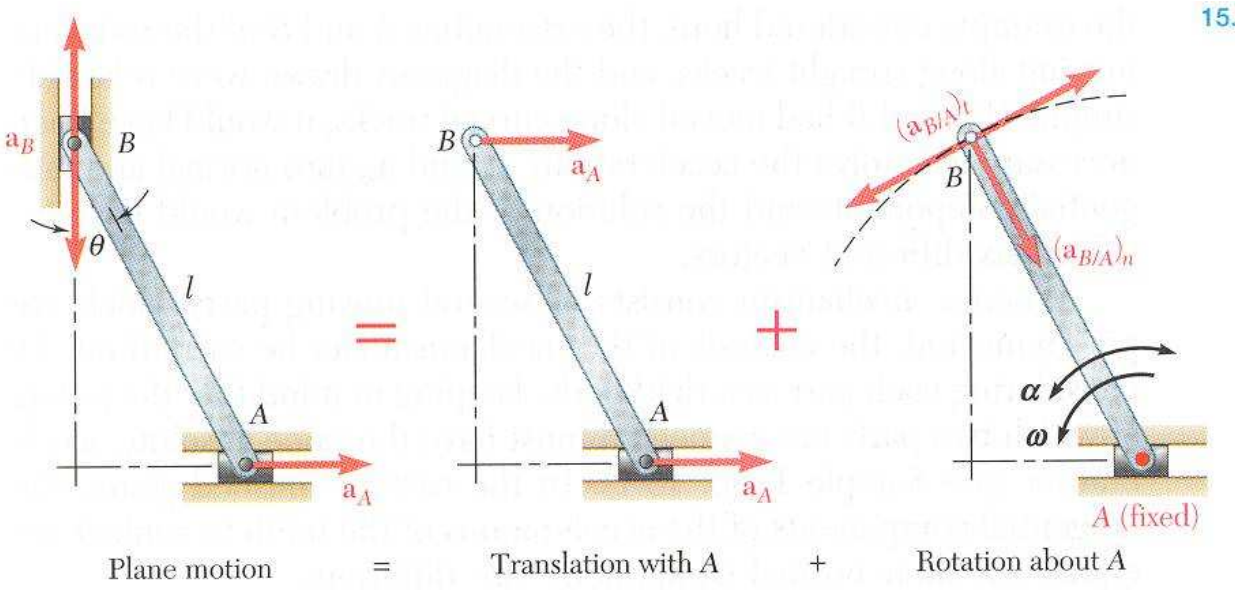


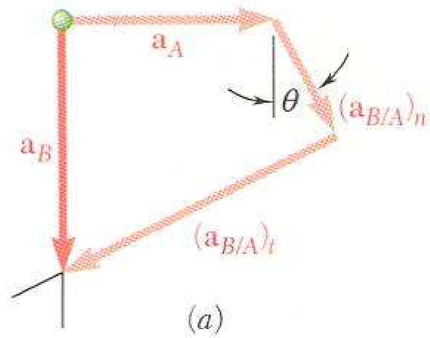


- El vector resultante depende del sentido de $\vec{a}_A$ y de la magnitud de a_A and $\left(a_{B/A}\right)_n$

- Debe conocer la velocidad angular ω.

Aceleración Absoluta y Relativa en Movimiento Plano





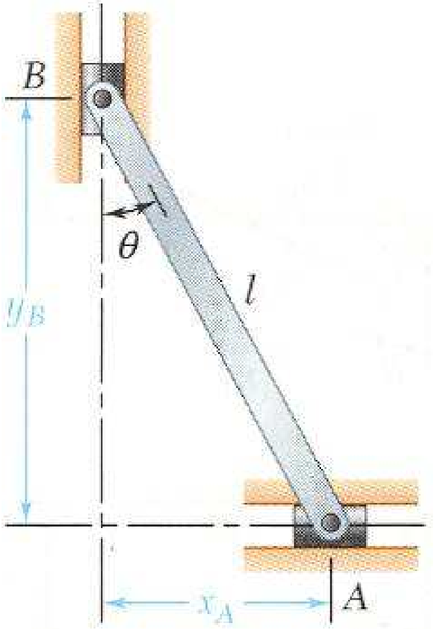
- $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ descomponiedo en sus componetes,

$\overset{+}{\rightarrow}$ x componente: $0 = a_A + l\omega^2 \sin\theta - l\alpha\cos\theta$

$+\uparrow$ y componente: $-a_B = -l\omega^2 \cos\theta - l\alpha \sin\theta$

- Resolver para a_B and α.

Análisis de Movimiento Plano en función de un Parámetro.



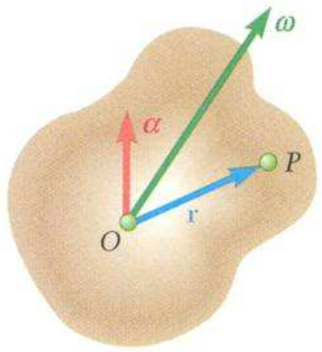
- En algunos casos, resulta ventajoso determinar la velocidad y aceleración absoluta de un mecanismo directamente.

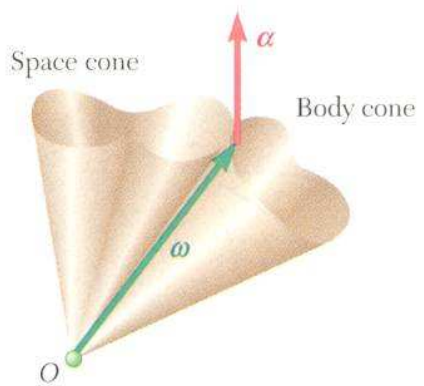
$$x_A = l\sin\theta \qquad y_B = l\cos\theta$$

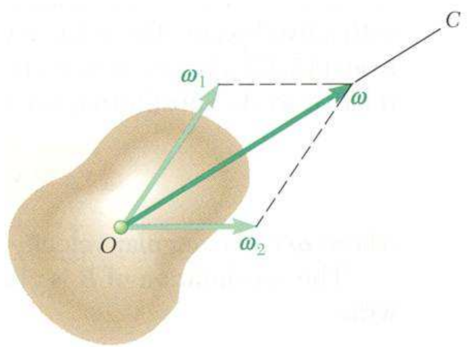
$$\begin{aligned} v_A &= \dot{x}_A \\ &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ &= l\omega\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_B &= \dot{y}_B \\ &= -l\dot{\theta}\sin\theta \\ &= -l\omega\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_A &= \ddot{x}_A \\ &= -l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta \\ &= -l\omega^2\sin\theta + l\alpha\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_B &= \ddot{y}_B \\ &= -l\dot{\theta}^2\cos\theta - l\ddot{\theta}\sin\theta \\ &= -l\omega^2\cos\theta - l\alpha\sin\theta \end{aligned}$$

Movimiento alrededor de un Punto Fijo







- El movimiento más general de un sólido rígido respecto a un punto fijo O es equivalente a una rotación del cuerpo alrededor de un eje por O.
- Con el eje instantáneo de rotación y la velocidad angular $\vec{\omega}$, la velocidad de la partícula P del cuerpo es

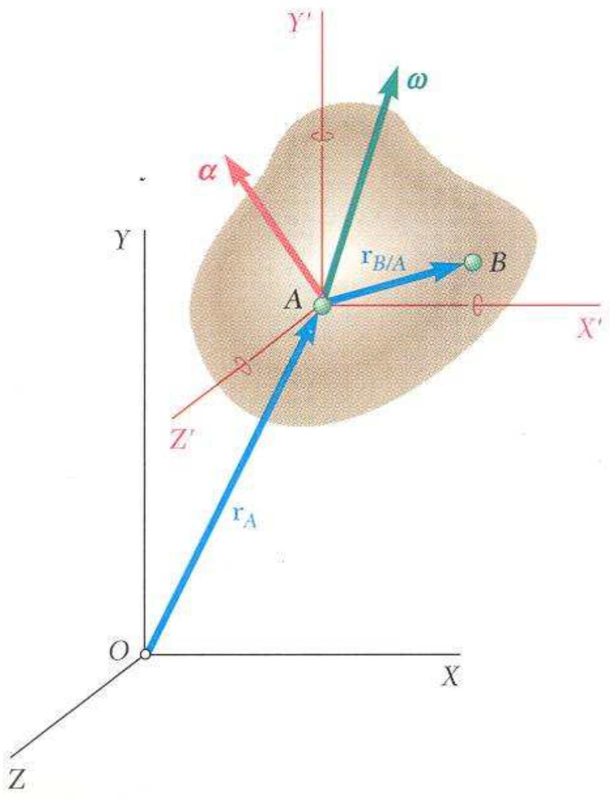
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

y la aceleración de la partícula P es

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

- La aceleración angular $\vec{\alpha}$ representa el cambio del vector $\vec{\omega}$.
- El vector $\vec{\omega}$ se mueve con el cuerpo y en el espacio y genera un cono del cuerpo y otro del espacio tangentes a lo largo del eje isntantáneo de rotación.
- Las velocidades angular tienen magnitud y dirección sumándose siguiendo la ley del paralelogramo.

Movimiento General



- Para la partícul A y B de un sólido rígido,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

- La partícula A es fija con el cuerpo y el movimiento del cuerpo relativo a $AX'Y'Z'$ es el movimiento de un cuerpo con un punto fijo.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

- De forma similar, la acelerción de la partícula P

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$
$$= \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}\right)$$

- El movimiento más general de un cuerpo rígido es eaquivalente a:
  - Una traslación en la cual todas las partículas tiene la misma velocidad y aceleración de referencia la partícaula A, y
  - El movimiento en el cual la partícula A se considera fija.