

# Secuencias Didácticas en Matemáticas

## Educación Básica Secundaria

### Matemáticas - Secundaria

Programa fortalecimiento  
de la cobertura con calidad  
para el sector educativo rural PER II



**MinEducación**  
Ministerio de Educación Nacional

**PROSPERIDAD  
PARA TODOS**

## Secuencias Didácticas en Matemáticas para Educación Básica Secundaria

© Ministerio de Educación Nacional  
Viceministerio de Educación  
Preescolar, Básica y Media  
Bogotá D.C. – Colombia  
**ISBN:** 978-958-691-548-9  
[www.mineducacion.gov.co](http://www.mineducacion.gov.co)



CORPOEDUCACIÓN  
CORPORACIÓN PARA EL DESARROLLO  
DE LA EDUCACIÓN

Esperanza Ramírez Trujillo | **Directora Ejecutiva**  
Ingrid Vanegas Sánchez | **Jefe de Investigación y Desarrollo de la Educación**  
Olga Lucía Riveros Gaona | **Coordinación General del Proyecto**

Luz Alexandra Oicata Ojeda; Luis Alexander Castro Miguez | **Autores**  
Edwin Fernando Carrión Carrión | **Corrector de Estilo**

---

### **Diseño y diagramación**

Sanmartín Obregón & Cía. Ltda.

### **Impresión**

Sanmartín Obregón & Cía. Ltda.

Se imprimió en la ciudad de  
Bogotá D.C. 3.500 ejemplares,  
Agosto de 2013



**PROSPERIDAD  
PARA TODOS**

María Fernanda Campo Saavedra  
**Ministra de Educación Nacional**

Roxana De Los Ángeles Segovia  
**Viceministra para la Educación Preescolar, Básica y Media**

Mónica Patricia Figueroa Dorado  
**Directora de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media**

Yaneth Sarmiento Forero  
**Directora de Fortalecimiento a la Gestión Territorial**

Nancy Cristina López López  
**Directora de Cobertura y Equidad**

**Programa Fortalecimiento de la cobertura con calidad  
para el sector educativo rural PER II**

Bibiam Aleyda Díaz Barragán  
**Coordinadora**

Melina Furman  
Ismael Mauricio Duque Escobar  
Juan Pablo Albadán Vargas  
Ana María Cárdenas Romero  
Diana Cristina Casas Díaz  
Betsy Yamil Vargas Romero  
**Comité de revisión de textos**



---

# Contenido

Presentación .....	07
Introducción.....	09
Matemáticas - Grado sexto: <i>¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?.....</i>	15
Matemáticas - Grado séptimo: <i>¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento? .....</i>	49
Matemáticas - Grado octavo: <i>¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?.....</i>	83
Matemáticas - Grado noveno: <i>¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?.....</i>	119
Bibliografía .....	155



# Presentación

## Mejorando la calidad de la educación en las zonas rurales

El Plan Nacional de Desarrollo “Prosperidad Para Todos” (2010-2014) tiene como uno de sus objetivos la superación de la inequidad y el cierre de brechas y enfatiza el desarrollo con enfoque territorial. El auge de la minería y la explotación de hidrocarburos; la instauración de megaproyectos forestales, de plantación y agroindustriales; los nuevos proyectos energéticos y viales; la reglamentación y ejecución de la Ley de Víctimas y Restitución de Tierras<sup>1</sup>; así como el proyecto de Ley de Tierras y Desarrollo Rural, son todos escenarios de análisis, formulación y ejecución de acciones encaminadas a mejorar las condiciones de vida de las comunidades que habitan nuestras zonas rurales, que deben incluir a la educación como un eje central.

Para lograrlo, se cuenta con el Plan Sectorial 2010-2014 “Educación de Calidad, el Camino para la Prosperidad”, que centra su política en el mejoramiento de la calidad educativa en el país y en el cierre de brechas de inequidades entre el sector oficial y el privado, y entre zonas rurales y urbanas. El Plan define una educación de calidad como aquella que *“forma mejores seres humanos, ciudadanos con valores éticos, respetuosos de lo público, que ejercen los derechos humanos y conviven en paz. Una educación que genera oportunidades legítimas de progreso y prosperidad para ellos y para el país. Una educación competitiva, que contribuye a cerrar brechas de inequidad, centrada en la institución educativa y en la que participa toda la sociedad”*.

La puesta en marcha de esta política educativa ha implicado el desarrollo de diversas estrategias que promuevan el desarrollo de competencias en los estudiantes, la transformación de las prácticas de los docentes y el fortalecimiento de la capacidad de las Secretarías de Educación y de los establecimientos educativos para incorporar dichas estrategias y programas y mejorar la calidad educativa.

Dentro del conjunto de estrategias implementadas, se cuenta con el Programa de Fortalecimiento de la Cobertura con Calidad para el Sector Educativo Rural (PER Fase I y II), que busca mitigar los problemas que afectan la calidad y cobertura educativa en zonas rurales, así como contribuir a superar la brecha existente entre la educación rural y urbana; pues el Gobierno Nacional considera a la educación como el instrumento más poderoso para reducir la pobreza y el camino más efectivo para alcanzar la prosperidad. En sus dos fases, este programa lleva más de una década de ejecución y ha sido financiado por un acuerdo de préstamo con el Banco Mundial.

Las acciones del PER se han orientado principalmente al diseño e implementación de estrategias pertinentes e innovadoras, que faciliten el acceso de los niños y jóvenes de las zonas rurales a la educación, así como el desarrollo profesional de los docentes y directivos docentes. De igual manera, a través de este programa el Ministerio de Educación ha impulsado la formulación y ejecución de Planes de Educación Rural departamentales y municipales, con el objetivo de visibilizar las características y necesidades de las poblaciones escolares rurales y de movilizar el diseño y ejecución de estrategias de atención lideradas

<sup>1</sup> Ley 1448 de 2011.

<sup>2</sup> Ley 715 de 2001, capítulo II.

---

por las Secretarías de Educación, que son las encargadas de planificar y prestar el servicio educativo, mantener y ampliar la cobertura así como garantizar la calidad, de acuerdo con las competencias definidas en la Ley 715 de 2001<sup>2</sup>.

Para el año 2013 el Ministerio de Educación tomó la decisión de ajustar una de las estrategias de este importante programa, con el fin de alinearlo con la política actual y con los planteamientos del Programa para la Transformación de la Calidad Educativa “Todos a Aprender”. Es así como, a partir de este año, se viene implementando una estrategia de desarrollo profesional situado de docentes y directivos docentes, con la cual se busca un mejoramiento de las prácticas de aula de los docentes rurales, de la utilización del tiempo de enseñanza y de la gestión académica que se adelanta en nuestras sedes rurales. La estrategia incluye actividades de acompañamiento a los docentes y directivos docentes, centradas en las problemáticas específicas del aula en matemáticas, ciencias naturales y competencias ciudadanas.

El material que tiene en sus manos hace parte del conjunto de instrumentos que el Ministerio de Educación Nacional pone a disposición de los docentes y directivos docentes para que guíen el proceso de mejoramiento que hemos emprendido en nuestras zonas rurales. Confiamos en que este material aportará a la construcción de más y mejores oportunidades para nuestros niños y jóvenes en el campo y, por ende, a la construcción de un país más justo.

**MARÍA FERNANDA CAMPO SAAVEDRA**  
**MINISTRA DE EDUCACIÓN NACIONAL**

---

<sup>2</sup> Ley 715 de 2001, capítulo II.

# Introducción

## Secuencias didácticas de matemáticas para básica secundaria

Las secuencias didácticas son un ejercicio y un posible modelo que se propone al docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas.

En este apartado se presentan las secuencias didácticas del área de matemáticas, que con una temática seleccionada apropiada para cada grado, tienen el propósito de ayudar al docente en la planeación y ejecución de varias sesiones de clase, y están desarrolladas desde la perspectiva del aprendizaje basado en la resolución de problemas y la indagación.

Se trata entonces de un material que facilitará al docente que trabaja reflexiva y críticamente, enriquecer sus conocimientos didácticos del contenido matemático, y al estudiante encontrar el sentido y el significado de lo que está aprendiendo, un propósito que involucra tanto los contenidos a enseñar como la didáctica para hacerlo.

La resolución de problemas que están relacionados brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar el uso de algunos procedimientos y la necesidad de perfeccionarlos para mejorar su solución y comprensión del concepto matemático que está en juego. En algunas investigaciones sobre la construcción de la multiplicación, por ejemplo, se insiste en que se aborden problemas multiplicativos que pongan en juego la necesidad de la multiplicación como suma abreviada y que se amplíe esta idea a la necesidad de la multiplicación como producto cartesiano, de modo que se logren conocimientos más complejos, que estén por encima de la simple memorización de las tablas de multiplicar. Las ideas desarrolladas de este modo solo se entienden si tienen sentido para el estudiante como producto de su propio pensamiento. Esta visión del aprendizaje sostiene que los estudiantes deben tener experiencias que les permitan dar sentido y significado a los diferentes aspectos del mundo. Si bien tener experiencias de primera mano es importante, especialmente para los niños más pequeños, todos los estudiantes necesitan desarrollar las habilidades que se usan en los procesos de construcción del saber, que rescatan la indagación como la resolución de problemas tales como preguntar, predecir, observar, interpretar, comunicar y reflexionar.

Es así como estas secuencias didácticas de matemáticas colocan las competencias comunicativas como un componente transversal necesario para la construcción y perfeccionamiento de las competencias matemáticas. Todas estas realidades son posibles si se organizan y si facilitan diálogos en el aula, estimulando el compartir y validar conocimientos para lograr comprensiones. De esta manera, las secuencias dan a los estudiantes la oportunidad de expresarse en sus propias palabras, de escribir sus propias opiniones, hipótesis y conclusiones, a través de un proceso colaborativo y libre que les aumente la confianza en sí mismos y su autonomía como aprendices. Por lo tanto, la resolución de problemas desde la indagación requiere de habilidades de enseñanza que modifiquen las relaciones de aula para que los estudiantes se conviertan en aprendices más independientes, que desarrollan sus propios conocimientos y comprensiones mientras el docente asume un rol aún más protagonista que el que usualmente ha tenido, pues es ahora el responsable de hacer que los aprendizajes sean inevitables.

Desde esta mirada las secuencias de matemáticas están construidas bajo dos pilares: **Una Situación Problema** que orienta cada una de las preguntas de las ocho semanas de planeación y **el contenido matemático que se desarrolla**. La situación problema se explicita en la primera semana para que no solo los estudiantes se contextualicen con ella, sino para que el docente pueda determinar los conocimientos que cree que usará y las preguntas que tendrá que contestar. En el desarrollo de

---

cada una de las semanas, los estudiantes van explorando e incorporando herramientas que les permiten dar una respuesta a la situación problema; respuesta que se comunica y valida en la séptima semana. Igualmente, en el proceso de cada una de las semanas se colocan otras situaciones que se relacionan con el contenido matemático a desarrollar y con el contexto de la situación para que los estudiantes, a la vez que adquieren experiencia para tratar problemas tipo, también adquieran la habilidad de aplicar ese saber en otros contextos, tal como se hace explícito en la octava semana.

### **La estructura de las secuencias de matemáticas**

Las secuencias matemáticas están propuestas para trabajar durante ocho semanas con los estudiantes y tienen la siguiente estructura:

- Visión general,
- Ruta de aprendizaje,
- Descripción de aprendizajes e
- Instrumento de evaluación.

En la visión general se ilustra el propósito de la secuencia, el desarrollo tanto de las competencias en el área como de las competencias comunicativas, la descripción semana a semana de las intencionalidades pedagógicas, el tratamiento del saber que se va complejizando en su avance, los momentos de evaluación y los desempeños esperados para la secuencia. La ruta de aprendizaje es una tabla que muestra la panorámica de cada una de las ocho semanas; como una ruta que ilustra las ideas clave de aprendizaje a desarrollar, los desempeños esperados y una breve descripción de las actividades de aprendizaje. En la descripción de las actividades se proponen dos sesiones por semana y cada actividad se describe puesta en escena en el aula, con las posibles formas de organización de los estudiantes. En esta descripción aparecen tanto las preguntas que generan procesos de indagación y sus posibles respuestas como la forma de abordar la situación problema; a la vez que se indican algunos momentos para que el docente recolecte evidencias del aprendizaje, que resultan centrales en un proceso de enseñanza eficaz. Cada una de las semanas está organizada para que el núcleo conceptual tratado se complejice y se verifique su aprendizaje semana a semana y sesión a sesión, con ayuda de los desempeños y de lo que se quiere alcanzar en cada una de las actividades.

### **Las secuencias de matemáticas para los grados de básica secundaria**

Las secuencias de matemáticas para los grados de básica secundaria se plantean bajo los parámetros anteriormente descritos. El tratamiento que se les da enfatiza en situaciones problema y en la construcción de conocimientos matemáticos más complejos, y las convierte así en diálogos que promueven en los estudiantes el uso de su capital matemático en cada una de las preguntas que orientan las semanas.

Se recomienda realizar las actividades en el orden propuesto para cada una de las secuencias, sin omitir algunas actividades, ya que a través de las preguntas, del orden establecido a nivel conceptual planteado en cada una de las sesiones y de la introducción de procedimientos o explicaciones, es posible lograr una comprensión mayor de los conceptos que involucran las secuencias de este ciclo de formación. Esto no implica que no sea posible, complementar, adaptar o enriquecer las actividades de acuerdo a las exigencias del entorno y las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. De hecho, a menudo se proponen momentos de reflexión individual o en grupo, ya sea frente al problema y su solución como al respecto de los caminos de aprendizaje. Estos momentos son preciosos y en consecuencia se recomienda no evitarlos o recortarlos, pues ayudan al estudiante a comprender mejor y a desarrollar capacidades mayores de aprendizaje.

Asimismo, procure que los momentos de explicación sean actos de validación de los conocimientos matemáticos y que se conviertan en espacios de comunicación cuyos significados se asocien tanto a la situación problema como a la misma generalización de los conceptos para aplicar en otras situaciones.

Lo importante es que el estudiante reconozca, con respecto al aprendizaje de las matemáticas, qué está aprendiendo, cómo lo está aprendiendo, cómo se usa lo que aprende, por qué y para qué de este aprendizaje.

Por otro lado, esta propuesta permea, en forma flexible, sus saberes y capacidades como docente, ya que las actividades de aprendizaje diseñadas a lo largo de la secuencia didáctica pueden ser enriquecidas, adaptadas y complejizadas de acuerdo a su contexto escolar. Lo importante es que el estudiante se desenvuelva en un contexto familiar para que, a través de las experiencias vividas, pueda construir las situaciones problema desde ahí, e interactúe con la situación y las comprensiones matemáticas que se requieren.

A continuación se ilustra la organización de las secuencias de matemáticas para los grados de básica secundaria:

GRADO	NOMBRE DE LA SECUENCIA	SITUACIÓN PROBLEMA CENTRAL	PROPÓSITO DE LA SECUENCIA A NIVEL DE CONTENIDO MATEMÁTICO
Sexto	¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?	En algunas zonas rurales de Colombia existen varios factores que impiden que los niños no puedan desplazarse cómodamente hasta sus escuelas. Entre ellos está el invierno, pues los ríos aumentan su caudal bloqueando las carreteras y la distancia que separa a las instituciones de las viviendas, que suele ser de varios kilómetros. Para ayudarles, una entidad ha invitado a estudiantes y docentes a participar en un estudio que busca determinar la distancia promedio que recorren diariamente los niños de estas zonas en el trayecto entre el hogar y el colegio, con el fin de asignar un transporte escolar según las necesidades. Así, esta secuencia se propone acciones para resolver la pregunta <b>¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?</b>	El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado séptimo describan y representen situaciones de variación proporcional directa e inversa.
Séptimo	¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?	Una empresa de tanques de almacenamiento de agua quiere analizar cómo se modifica la altura del llenado cuando cambia la forma del tanque, para reducir la utilización de recursos. En sus estudios, la empresa ha realizado experimentos y recolectado datos pero no ha podido comprender qué información le brinda la modificación del llenado de los tanques. Es por esto que esta secuencia propone acciones para resolver la pregunta: <b>¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?</b>	El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado segundo identifiquen y describan regularidades y patrones en distintos contextos.

GRADO	NOMBRE DE LA SECUENCIA	SITUACIÓN PROBLEMA CENTRAL	PROPÓSITO DE LA SECUENCIA A NIVEL DE CONTENIDO MATEMÁTICO
Octavo	¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?	Un veterinario debe determinar cuáles reses están enfermas de ántrax o de fiebre aftosa en una región del país. El veterinario decide entonces realizar exámenes de sangre para asegurarse de si presentan o no alguna de las enfermedades. A partir de los resultados, pretende determinar el número de reses a ser sacrificadas o tratadas con antibiótico, según el nivel de desarrollo de las enfermedades. A pesar del examen, el veterinario tiene temor de tomar decisiones equivocadas porque sabe que algunas pruebas médicas o procedimientos de vigilancia generan falsos positivos o falsos negativos. Es por eso que la secuencia se propone acciones para resolver la pregunta: <b>¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?</b>	El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado octavo construyan métodos para determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento para un fenómeno aleatorio.
Noveno	¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas de animales?	En una finca se requiere realizar cercas para los animales. Jorge quiere determinar la mejor forma de encerrar y de distribuir el espacio. Es por esto que esta secuencia propone acciones para resolver la pregunta: <b>¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas de animales?</b>	El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado noveno describan y representen situaciones de variación con funciones polinómicas.

La secuencia didáctica de matemática de grado de sexto, a través de sus actividades, logra que los estudiantes comprendan algunas relaciones del proceso de estimación y su relación con la aproximación en contextos de medida. Aunque su desarrollo abarca todos los pensamientos y sistemas matemáticos, esta secuencia plantea un conjunto de actividades para movilizar diferentes estrategias de estimación, apoyadas en las expresiones decimales y en la construcción de habilidades para predecir la posible medida del atributo de un objeto, a la vez que permite reflexionar sobre este concepto.

En la secuencia didáctica de matemáticas de grado séptimo, en cambio, los estudiantes entienden que existe una variación proporcional entre dos variables, y que esta variación puede ser directa o inversa. Asimismo, bajo la experimentación del llenado de recipientes, los estudiantes pueden visualizar tanto algunos aspectos de esta variación, como sus formas de representarla a nivel tabular y gráfico.

Los estudiantes de grado octavo, a través de las actividades de la secuencia, perciben que la probabilidad de ocurrencia de un suceso se relaciona con situaciones aleatorias. En ella se muestra que mediante el acercamiento a las actividades de azar, como ciertos juegos que requieren de la toma de decisiones, es posible no solo establecer relaciones probabilísticas de los diferentes eventos, las cuales se asocian a las experiencias de los resultados y métodos matemáticos; sino hacer de ellas representaciones de forma fraccionaria, decimal y porcentual.

Finalmente, a través de las actividades de la secuencia didáctica de matemáticas de grado noveno, los estudiantes comprenden aspectos relacionados con las funciones como recursos para modelar diferentes situaciones. A su vez, aborda las *funciones lineales, cuadráticas y polinómicas* cuya propuesta de enseñanza es enriquecida con sus respectivas representaciones: Tabular, gráfica y como fórmula.

---

Esta información que se presenta de las secuencias es complementada con la visión general de cada una, ya que su desarrollo da los detalles de los diferentes aspectos antes mencionados que se buscan para mejorar la práctica docente, las interacciones entre los saberes, las interacciones entre estudiantes y el docente, las organizaciones del aula y la propuesta de actividades en torno a una situación problema. De esta manera, las secuencias didácticas de matemáticas se convierten en herramientas pedagógicas que acercan el saber disciplinar al aula de clase en contextos reales, viables y pertinentes.



¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?

# ¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?

## Visión General

El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado sexto identifiquen que la estimación es un proceso que produce resultados aproximados, por lo tanto se podrán tomar decisiones sobre qué cantidades pueden ser despreciadas a partir de algunas situaciones cotidianas.

La situación problema que orienta la secuencia es:

En algunas zonas rurales de Colombia existen varios factores que impiden que los niños no puedan desplazarse cómodamente hasta sus escuelas; entre ellos está el invierno, pues los ríos aumentan su caudal bloqueando las carreteras y la distancia que separa a las instituciones de las viviendas, puesto que les toca caminar varios kilómetros para llegar a sus centros educativos. Para ayudarles, una entidad ha invitado a estudiantes y docentes a participar en un estudio que busca determinar la distancia promedio que recorren diariamente los niños de estas zonas en el trayecto hogar y colegio, con el fin de asignar un transporte escolar según las necesidades.

Así, esta secuencia se propone acciones para resolver la pregunta **¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?** y promueve el desarrollo del pensamiento matemático cuando el estudiante emite juicios razonables sobre el valor de una determinada cantidad numérica, éste asigna una valoración aproximada sobre el resultado de una medida, al estipular si un número dado es mayor o menor que la respuesta exacta. Otros aspectos a los que se ven enfrentados los estudiantes están relacionados con los procedimientos numéricos de *truncamiento* y *redondeo*, *el tratamiento del error* y *la valoración de las cifras significativas*. Finalmente, el estudiante podrá reconocer que el proceso de estimación le permite establecer conexiones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, puesto que desde el carácter inexacto e incompleto de dicho proceso, se contribuirá a organizar formas de pensamiento flexibles asociadas a contextos particulares en los y las estudiantes.

Al inicio de la secuencia didáctica los estudiantes se enfrentan al problema planteado y comparten sus primeras explicaciones para dar solución a la pregunta propuesta; además, se viven situaciones en las que deben no sólo estimar la medida de algunos objetos sino también seleccionarlos a partir de dichas medidas. En la semana 2 los niños deben estimar las distancias entre diferentes objetos. Para ello, desde su experiencia, podrán concluir que entre “más cerca estén los objetos” les será más fácil establecer dicha estimación. Esta conclusión se retoma en la semana 3, puesto que los estudiantes se enfrentan a situaciones en donde es necesario realizar aproximaciones cada vez más precisas de diferentes longitudes. Posteriormente, en las se-

---

manas 4, 5 y 6, se retoma la idea de realizar aproximaciones cada vez más exactas de diferentes longitudes con el fin de dar cuenta de la precisión que se desea, pero éstas se acompañan de un elemento extra; los niños se enfrentan a situaciones en las que deben establecer, de manera intuitiva, si se cometió algún error al realizar la aproximación. También reconocen que dadas dos medidas, puede existir una tercera que se encuentra entre las dos anteriores. A medida que avanzan en el desarrollo de las actividades concluyen que no es solo una, sino que existen varias medidas entre las dos, ya dadas. Por otra parte, reconocen que existen algunas técnicas que les permiten realizar cálculos de manera más rápida donde se utiliza una representación numérica de dichas estimaciones. En la semana 7 se vuelve con la *pregunta problema* planteada para esta secuencia; allí se espera que el maestro determine los aprendizajes de los estudiantes con relación a la estimación y la aproximación, aclare dudas del proceso o genere nuevos cuestionamientos. Finalmente, en la semana 8 se realiza el cierre y la evaluación, para ello se establecen situaciones en otros contextos en los que se hace uso de los procesos de estimación y aproximación, puesto que se requiere algún grado de precisión, de tal manera que se pueda avanzar en la conceptualización que se ha venido dando. Se sugiere que utilice el INSTRUMENTO PARA LAS EVALUACIONES DEL APRENDIZAJE que permite evaluar el proceso de estimación. Así mismo, a lo largo de cada una de las actividades de aprendizaje planteadas en la secuencia, se recomiendan momentos de evaluación cuando se invita tanto al docente como a los estudiantes a reflexionar sobre lo construido y se proponen algunas tareas evaluativas al final de cada semana y de la secuencia.

Los desempeños esperados de un estudiante para esta secuencia didáctica son:

- Realizo estimaciones de medidas relacionadas con diferentes magnitudes.
- Justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable de las respuestas obtenidas.
- Determino estrategias para buscar, seleccionar y almacenar información.

## ¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?

SEMANA	PREGUNTAS GUÍA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS
1	¿Cuáles objetos tienen estas medidas?	<ul style="list-style-type: none"> <li>La unidad de medida es un aspecto fundamental al estimar.</li> <li>Medir es estimar.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comparo la medida de algunos objetos para determinar la de otros.</li> <li>Utilizo una unidad de medida para determinar la medida de un objeto.</li> <li>Realizo estimaciones de medidas teniendo presente la magnitud <i>Longitud</i>.</li> </ul>
2	¿Cuánto mide sin utilizar instrumentos?	<ul style="list-style-type: none"> <li>La estimación produce resultados aproximados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Encuentro que la estimación produce resultados aproximados.</li> <li>Estimo el valor de la medida sin usar instrumentos.</li> </ul>
3	¿Cuánto estuve cerca entre mi cálculo aproximado y la distancia real?	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diferencia entre el valor real y el valor estimado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Determino que no es posible establecer con exactitud la medida que se requiere.</li> <li>Calculo la diferencia entre el valor real y el valor estimado.</li> </ul>
4	¿Cuánto mide, si sé que esto mide aproximadamente 50 cm?	<ul style="list-style-type: none"> <li>La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; la estimación se aproxima tanto como la situación lo precise.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifico que, en algunos casos, es necesario la precisión al medir.</li> <li>Diferencio lo exacto de lo aproximado.</li> </ul>
5	¿Cómo puedo representar estas medidas?	<ul style="list-style-type: none"> <li>Los números decimales son una forma de representar la idea de aproximación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Represento distancias muy precisas empleando los números decimales.</li> <li>Determino que entre dos números dados hay más números.</li> <li>Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.</li> </ul>
6	¿Qué tanto me equivoco al establecer las medidas?	<ul style="list-style-type: none"> <li>Importancia del error en la idea de aproximación.</li> <li>Técnicas de estimación (truncamiento y redondeo).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Determino cuánto me equivoco al medir.</li> <li>Identifico y aplico diferentes técnicas de estimación.</li> </ul>
7	¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?	<ul style="list-style-type: none"> <li>La idea de estimación y aproximación se emplea en diversos contextos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Realizo estimaciones de medidas relacionadas con diferentes magnitudes.</li> <li>Justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias.</li> <li>Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.</li> <li>Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.</li> <li>Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable de las respuestas obtenidas.</li> <li>Determino estrategias para buscar, seleccionar y almacenar información.</li> </ul>
8	Cierre y Evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>El proceso de estimación está presente en lo social, en lo económico y en las ciencias.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias.</li> <li>Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.</li> <li>Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.</li> </ul>

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- Se plantea la situación problema que se vivirá a lo largo de la secuencia y se invita a los estudiantes a que realicen sus primeras exploraciones al respecto.
  - Los estudiantes tienen que establecer una medida aproximada de objetos presentes en el aula de clase.
- 
- Se enfrenta a actividades de medición que exigen ciertas aproximaciones sin recurrir a ningún instrumento de medida.
  - Los estudiantes realizan un juego que les permitirá iniciar la idea de estimar la medida de algunas distancias.
  - Las actividades permiten que los estudiantes formulen algunas explicaciones a partir de lo que observan y ejecutan.
  - Los estudiantes reconocen algunos sitios de la institución educativa y estiman la distancia que hay desde el salón de clase a cada uno de ellos.
- 
- Se retoma el juego planteado en la semana 2, donde los estudiantes realizan las mediciones respectivas y comparan los resultados con lo estimado anteriormente.
  - Las actividades permiten que los estudiantes formulen algunas explicaciones a partir de lo que observan y ejecutan.
  - Los estudiantes reconocen algunos sitios de la institución educativa y miden la distancia que hay desde el salón de clase a cada uno de ellos, empleando una unidad de medida.
- 
- A partir de una unidad de medida, el estudiante establecerá la longitud de algunos objetos.
  - Los estudiantes retoman la pregunta central de la secuencia e inician un primer estudio empleando una unidad de medida.
- 
- Los estudiantes deben tomar la medida de su estatura y realizar ciertas comparaciones.
  - Se brinda un procedimiento que permite ordenar los números decimales.
  - A partir de una noticia deportiva, los estudiantes deben ofrecer explicaciones sobre los resultados obtenidos y la importancia de tener un cálculo exacto o aproximado.
- 
- Los estudiantes se enfrentan a un juego que les permitirá reflexionar sobre el error cometido al realizar el proceso de estimación.
  - Se brindan herramientas para aplicar técnicas de estimación como lo es el redondeo.
- 
- Se retoma la situación problema planteada en la secuencia y se invita a los estudiantes a dar respuesta a la pregunta a partir de las elaboraciones construidas a lo largo de la misma. Para ello se hace énfasis en tres aspectos: La necesidad de la discusión previa y establecimiento de acuerdos acerca de cómo van a realizar el procedimiento; la reflexión acerca de cómo lo han hecho, verificando si todos lo hicieron del mismo modo, cuáles fueron las mejores estrategias, por qué, etc., y la ejecución de lo planeado con su respectivo contraste.
- 
- Se presenta a los estudiantes diferentes contextos en los que puede hacer uso del proceso de estimación para dar solución a la situación planteada.

# ¿Cuáles objetos tienen estas medidas?

### ! IDEAS CLAVE:

- La unidad de medida es un aspecto fundamental al estimar.
- Medir es estimar.

### ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Comparo la medida de algunos objetos para determinar la de otros.
- Utilizo una unidad de medida para determinar la medida de un objeto.
- Realizo estimaciones de medidas teniendo presente la magnitud *Longitud*.

Inicie la secuencia didáctica explorando los saberes previos de los estudiantes para determinar qué saben y qué no saben con respecto a la temática a trabajar. Esta exploración corresponde a una evaluación diagnóstica que le permite a usted identificar el lugar de donde puede partir para la construcción de conocimiento. Puede realizarla por medio de actividades orales, escritas y juegos, entre otros. Además, la evaluación diagnóstica le permite establecer un punto inicial, adecuar las actividades a los estudiantes y evidenciar el desarrollo de competencias durante la secuencia didáctica.

### Primera sesión

*En la enseñanza de las matemáticas, el primer encuentro con la aproximación, concretamente con el valor aproximado, se realiza en el dominio de la medida. Este dominio suele ser presentado en la enseñanza con los siguientes enfoques: Tempranamente se incluyen en la enseñanza elementos "teóricos" de la medida y se efectúan prácticas para establecer la unidad, que surge del número de la medida, el cual es reducido a los números naturales o a los fraccionarios. Para Chamorro (1997), tal proceso inicia el camino para que los estudiantes admitan el espejismo de la medida exacta de un objeto a nivel experimental; obviando de esta manera, desde muy temprano el debate de la precisión y la exactitud. Aun en los casos en los que el número de medida resultante es un decimal, éste también se interpreta como el resultado de una medida exacta. En el otro enfoque también se privilegian "elementos teóricos" de la medida y desde estos se enfatiza la medida de objetos matematizados (rectángulos cuadrados, etc.), que a su vez está determinada por el uso de fórmulas.*

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes exploran la situación y brindan posibles procedimientos e instrumentos para medir distancias, dando sus primeras respuestas a la pregunta que orienta la secuencia.

Secuencia didáctica: **¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?**

**Materiales:**

- Situación problema.

**Desarrollo propuesto:**

Presente a los estudiantes la situación que van a vivir a lo largo de la secuencia, la cual puede enunciar de la siguiente manera:

*La situación problema que orienta la secuencia es:*

*En algunas zonas rurales de Colombia existen varios factores que impiden que los niños no puedan desplazarse cómodamente hasta sus escuelas; entre ellos está el invierno, pues los ríos aumentan su caudal bloqueando las carreteras y la distancia que separa a las instituciones de las viviendas, puesto que les toca caminar varios kilómetros para llegar a sus centros educativos. Para ayudarles, una entidad ha invitado a estudiantes y docentes a participar en un estudio que busca determinar la distancia promedio que recorren diariamente los niños de estas zonas en el trayecto hogar y colegio, con el fin de asignar un transporte escolar según las necesidades.*

Permita que los estudiantes compartan a través de grupos pequeños, sus ideas iniciales frente a este reto. Posteriormente organice a los estudiantes en mesa redonda e inicie una reflexión sobre esas ideas iniciales. A partir de esta reflexión, los estudiantes pueden generar otras preguntas como: “¿Qué es distancia promedio?”, “¿a cuántos niños debo preguntarles la distancia que recorren diariamente?”, “¿en cuántas zonas rurales se está haciendo este estudio?”, “¿es necesario comunicarme con los habitantes de las otras zonas?, ¿qué materiales puedo utilizar para medir la distancia solicitada? Aproveche esta última intervención y pregunte qué necesitan para medir las distancias solicitadas. Quizás algunos estudiantes respondan que necesitan un metro (es decir, una cinta métrica), otros dirán que podrían medir dichas distancias con los pasos de una persona o definiendo una distancia más o menos estable marcando su inicio y final con piedras o estacas. Recolecte la información suficiente que le permita enriquecer más adelante algunas de las reflexiones. Según el instrumento de medida que nombren los estudiantes, adecue las pre-

guntas siguientes a este supuesto instrumento de medida e indague, *¿cómo saber cuántas piedras (estacas, metros o pasos) se necesitan para determinar distancias hasta cubrir la solicitada?* A lo que los estudiantes pueden responder que depende de la distancia a la que se encuentre el colegio de la casa. Propóngales la siguiente situación: *Si hice el ejercicio de arrojar una a una las piedras procurando mantener la misma distancia y conté 35 piedras cuando llegue a la casa, ¿qué me indica este resultado?* Algunos responderán que 35 metros (pasos o piedras), por tal razón pregúnteles, *¿cómo se puede garantizar que son de la misma distancia?, ¿por qué?* Estas últimas ideas son de gran ayuda más adelante cuando se inicie el ejercicio de estimación, pues algunos estudiantes pueden afirmar que la distancia de un lugar a otro se encuentra a determinado número de piedras (metros o pasos); frente a esto, permita que los estudiantes vivan la experiencia de medir algunas distancias en el salón con los instrumentos de medida que se nombraron y pregunte si es posible estimar sin medir. Recolecte evidencias al respecto.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes estimen la medida de algunos objetos y determinen la unidad de medida más apropiada.

#### Materiales:

- Diferentes objetos a los que se les pueda medir el largo, el alto y el ancho, tales como lápiz, muebles, puertas, cuadernos, ventanas, entre otros.
- Hojas de papel.
- Cinta de enmascarar.

#### Desarrollo propuesto:

Permita que los estudiantes realicen algunas estimaciones en cuanto a la medida de la longitud de algunos objetos marcada con la cinta de enmascarar; para ello organice el salón en mesa redonda, luego ubique varios elementos (no más de cinco, pero con una diferencia notable en esta medida marcada con la cinta en los objetos) en el centro del salón garantizando que estén visibles para los niños, e indíqueles que, sin levantarse del puesto, tendrán que enunciar la medida marcada de los objetos expuestos. Tome el tiempo suficiente para que los niños observen los objetos y puedan establecer una posible medida. Entrégueles una hoja y pídale que escriban el nombre de cada objeto con su respectiva medida. Esté muy atento a las acciones que realizan los niños, ya que es necesario recolectar la información que permita enriquecer la reflexión más adelante, por ejemplo, algunos niños, pueden utilizar algunas partes de su cuerpo para determinar el largo del lápiz,



otros establecerán la medida de uno de los objetos y lo utilizaran como referente para indicar las medidas de los otros, por lo cual habrán expresiones tales como: “si el lápiz mide 25 cm entonces la altura de la caja es de 50 cm más o menos”. Permita que cada estudiante enuncie las medidas que escribió en la hoja,

porque dichas intervenciones deben estar acompañadas de su respectiva explicación; para ello formule preguntas como *¿cuánto mide el largo del lápiz?, ¿cómo hizo para determinar esa medida?, ¿esta medida se diferencia mucho de la de los otros compañeros?, ¿por qué?* Proceda así con cada uno de los objetos. Registre la información en el tablero a través de una tabla de tal manera que le permita enriquecer la reflexión más adelante.

Niño Objeto	Juan	Pedro	María	Diana	José	...
Lápiz						
Cuaderno						
...						

Una vez registrados los datos, realice preguntas a partir de la información recolectada como *¿qué estudiante se acercó más a la medida del objeto, por qué?, ¿cuál fue la estrategia utilizada por algún compañero para determinar la medida de cada objeto, que les llamo más la atención?, ¿por qué?, ¿cómo hacemos para saber quién se acercó más a la medida del objeto?* Frente a esta última pregunta algunos estudiantes responderán de inmediato que *midiendo*, entonces pregunte *¿cómo hacemos para medir lo solicitado?, ¿qué podemos utilizar?* Permita que los estudiantes compartan sus respuestas y acuerden la forma como tomaron las medidas. Algunos retomarán las partes de su cuerpo para medir, otros propondrán la regla o el metro, dependiendo el objeto.

Ahora, invite a los estudiantes a que manipulen los objetos y que nuevamente establezcan una posible medida utilizando los instrumentos que acordaron. Recolecte evidencias en cuanto a las acciones que realizan los estudiantes para establecer la medida de los objetos. Invite a los estudiantes a que comparen cuál de los objetos tiene menor

longitud y cuál mayor; para ello pueden utilizar métodos que superan la apreciación, por ejemplo, introducir partes de su cuerpo como los dedos de la mano para formar ‘cuartas’, o utilizar otros objetos como unidades de medida como un lápiz, o un borrador, etc. Además, puede constatar que realizan comparaciones directas entre los objetos, tomando uno de ellos como unidad de medida, entonces aproveche este procedimiento para constituir un acuerdo sobre la importancia de establecer una unidad de medida cuando se desea determinar la medida de cualquier objeto; algunos estudiantes incluso afirmarán que es necesario utilizar varias veces dicha unidad (patrón de medida) para determinar el valor de la medida solicitada. Pida a los estudiantes que diligencien nuevamente la tabla y que comparen los resultados obtenidos.

Niño \ Objeto	Juan	Pedro	María	Diana	José	...
Lápiz						
Cuaderno						
...						

Acompañe esta reflexión de preguntas tales como, al comparar las dos tablas ¿qué objeto no tiene una diferencia grande en sus medidas?, ¿qué ayuda a que la medida establecida inicialmente coincidiera con la de la segunda tabla? Quizás algunos estudiantes coincidan más en las medidas de los objetos pequeños puesto que diariamente están más en contacto con los mismos y han establecido un modelo que les permite realizar una mejor estimación respecto a su medidas, ya sea utilizando algunas partes de su cuerpo o porque recuerdan la medida de algún objeto y la toman como referente. Ahora, pídeles que enuncien las posibles medidas de otros elementos presentes en el salón que no hicieron parte de la actividad (recuérdelos que no pueden utilizar los instrumentos que acordaron anterior-

mente), como por ejemplo la altura de la puerta, la estatura de una estudiante o profesor, el ancho, largo o alto del salón, la altura de un mueble.

A manera de evaluación pida a los estudiantes que encuentren objetos a partir de una medida dada, por ejemplo, encontrar algunos objetos cuya medida aproximada sea de 30 cm, o mostrar dos objetos similares de largos, uno en cada mano y pregunte *¿cuál es más largo?, y ¿cómo hacer para saber con precisión cuál es más largo?* De forma similar se muestran dos objetos más o menos iguales de largo que no se pueden desplazar para emparejarlos y estimar sus dimensiones (por ejemplo, comparar el largo de una ventana con el tablero o con el largo de un mueble).

*El término estimación tiene múltiples usos y campos de aplicación. Desde lo planteado por Segovia, Castro, Rico y Castro (1989, p. 18) la estimación es un “juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite” es por esto que aparecen dos tipos de estimación:*

- Estimación en cálculo, referido a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados. Ejemplo: una estimación del resultado de 2345 multiplicado por 52 es 120000.*
- Estimación en medida, referido a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida. Dentro de la estimación en medida se distinguen dos grupos de magnitudes, las continuas y las discretas. Por ejemplo, una estimación de magnitudes continuas es la valoración que hacemos sobre la estatura de una persona cuando la comparamos con la nuestra propia; para el caso de magnitudes discretas es la estimación del número de personas que asisten a una manifestación. El desarrollo de esta secuencia centrará su trabajo en estimación sobre medidas.*

# ¿Cuánto mide sin utilizar instrumentos?

## ! IDEAS CLAVE:

- La estimación produce resultados aproximados.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Encuentro que la estimación produce resultados aproximados.
- Estimo el valor de la medida sin usar instrumentos.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes establezcan las medidas de ciertas distancias sin utilizar instrumentos convencionales para establecer las mismas.

#### Materiales:

- Palos de madera (para simular palos de golf).
- Hojas de papel.
- Cinta ancha transparente.

#### Desarrollo propuesto:

Presente a los estudiantes el juego **¿Qué tan lejos puedo lanzar la pelota?**, el cual puede acompañar de la siguiente definición:

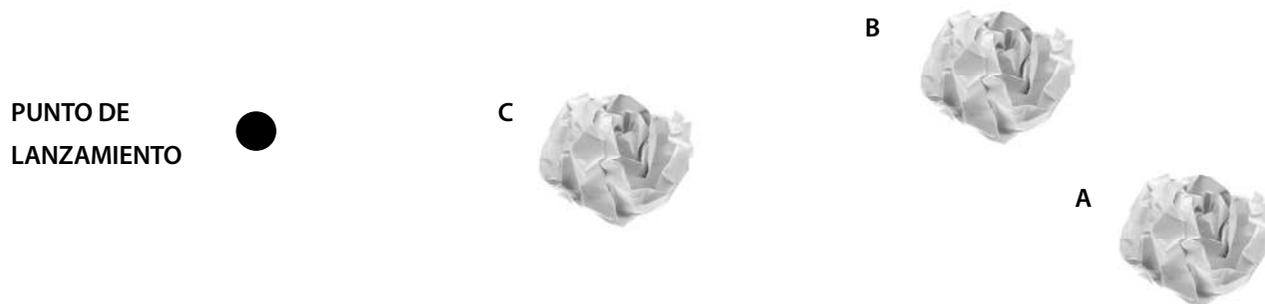
*El juego consiste en lanzar una pelota lo más lejos posible utilizando como herramienta un palo (simulación del golf). Posterior a ello el estudiante que está esperando su turno determina qué tan lejos la lanzó su compañero desde el punto donde golpeó la pelota (enuncia una medida). Gana el juego quién lance más lejos la pelota.*

Permita que los estudiantes elaboren la pelota en papel (una para cada estudiante, la cual deben marcar con su nombre) y que realicen algunas prácticas de lanzamiento; para ello debe colocar la pelota en el piso (que será la misma posición para los diferentes miembros del grupo), tomar el palo en sus manos y pegarle a la misma (garantice

que los estudiantes estén en un espacio abierto y que no se van a lastimar con el palo). Además, ayúdeles a identificar los dos momentos del juego (lanzar la pelota y enunciar la medida que recorre la pelota). Pida a los estudiantes que conformen grupos de tres personas para realizar la actividad.

Permita que los estudiantes jueguen alrededor de 30 minutos para que cada uno realice por lo menos 10 lanzamientos. Posterior al juego reflexione con los estudiantes sobre lo sucedido en la actividad; para ello debe recolectar la información necesaria que le permita enriquecer dichos diálogos. Inicialmente puede preguntar *¿Cuál de las pelotas está más lejos del punto de lanzamiento?* Algunos estudiantes comparan dichas distancias y pueden afirmar que el estudiante **A** la lanzó más lejos que el estudiante **B**, y que éste a su vez la lanzó más lejos que el C. De esta manera, la

posición en la que cayó cada una de las pelotas, les permite enunciar algunas medidas; por ejemplo, el estudiante A puede decir: *"la mía está a 7 metros"*, por lo tanto el B dirá, *"la mía está a 6 metros"* y el C dirá *"la mía a 5 metros"*. Esté atento a las acciones que realizan los estudiantes para determinar dicha medida. Además puede plantear otras preguntas como: *¿Por qué se puede afirmar que la pelota está a siete metros?, ¿cómo hizo para determinar dicha medida?* Puede simular una de la rondas del juego, ubicando tres pelotas a distancias diferentes del punto de lanzamiento.



Nuevamente, algunos estudiantes tomaran como referencia su cuerpo para enunciar las medidas solicitadas o ya cuentan con algún punto de referencia para enunciar las mismas; quizás algunos afirmen: *"Si midiera con pasos habrían 10, y como cada paso mide aproximadamente 50 cm, entonces con dos pasos hago un metro y con 10 paso 5 metros"*. Otros dirán: *"Si la cancha mide aproximadamente 12 metros entonces mi pelota está a siete metros"*. Recolecte evidencias de estas respuestas puesto que más adelante se aplicarán algunos procedimientos para verificar las mismas.

El concepto general de **estimación** tiene implícitas las características dadas por Reys (1984) y completadas por Segovia, Castro, Rico y Castro (1989, p. 21) las cuales son:

1. Consiste en valorar una medida, una cantidad o el resultado de una operación aritmética.
2. El sujeto que hace la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.
3. La valoración se realiza por lo general de forma mental.
4. Se hace con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles.
5. El valor asignado no es exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones.
6. El valor asignado admite distintas aproximaciones dependiendo de quién realice la valoración.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes establecen la medida, de manera apreciativa, de la distancia entre el colegio y otros lugares.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.

#### Desarrollo propuesto:

Permita que los estudiantes realicen algunas estimaciones de la distancia en la que se encuentran algunos lugares específicos del colegio o fuera de él. Establezca el punto de partida, el cual podría ser inicialmente el aula de clase, luego proponga algunos lugares, como la oficina del rector o del coordinador, los baños de niños o niñas, la cooperativa o restaurante, entre otros (no más de cinco lugares, pero con una diferencia notable en sus distancias). Tome el tiempo suficiente para que los niños, sin moverse del aula de clase, imaginen el recorrido que deben hacer y puedan establecer una posible medida. Entrégueles una hoja y pídeles que realicen los posibles recorridos que deben hacer y que establezcan la distancia a la que se encuentran los otros sitios con respecto al salón. Esté muy atento a las acciones que realizan los estudiantes, para ello recolecte evidencias que le permitan enriquecer la reflexión más adelante, por ejemplo, algunos estudiantes, realizarán un croquis del recorrido que harían para llegar al sitio indicado y a partir del mismo, que determinen la distancia solicitada. Pueden utilizar como referencia las distancias más cortas para indicar las distancias que separan los sitios indicados; con la anterior situación pueden surgir expresiones de los estudiantes, tales como: *“Si del salón al patio hay 3 metros, entonces del salón al baño de los niños hay 7 metros más o menos”*. Permita que cada estudiante comparta sus producciones, pero dichas intervenciones deben estar acompañadas de su respectiva explicación, para ello formule preguntas como: *¿Qué recorrido siguió para llegar al sitio indicado?, ¿cuál es la distancia que separa el salón de ese lugar?, ¿cómo hizo para determinar dicha distancia?, ¿esta medida se diferencia mucho de la tomada por los otros com-*

*pañeros?, ¿por qué?* Proceda así con cada uno de los estudiantes. Registre la información en el tablero a través de una tabla, de tal manera que le permita enriquecer más adelante la reflexión (copie esta tabla en sus apuntes porque la necesitará más adelante).

Niño Lugares	Juan	Pedro	María	Diana	José	...
Baño de los niños						
Sala de profesores						
...						

Una vez registrados los datos, realice preguntas a partir de la información recolectada como: *¿Qué estudiante se acercó más a la distancia entre el salón de clases y la coordinación (o al punto acordado), por qué?, ¿qué estrategias les llamo más la atención, de las utilizadas por sus compañeros para determinar las distancias solicitadas?, ¿por qué?, ¿cómo hacemos para saber quién se acercó más a la medida de la distancia solicitada?* Frente a esta última pregunta algunos estudiantes responderán de inmediato que *“midiendo”*, entonces pregunte: *¿Cómo hacemos para medir las distancias solicitadas? y ¿qué podemos utilizar?* Permita que los estudiantes compartan sus respuestas y acuerden cómo tomarán las medidas. Algunos usarán algunas partes de su cuerpo para medir, mientras otros propondrán la regla o el metro, dependiendo de la distancia.

(Es importante tener presente las dificultades conceptuales propias de la medición, entre las que se destacan:

1. *La medida es el resultado de la operación material de medir lo que implica hallar un método que permita efectivamente obtener un tipo de número y un intervalo (o familia de intervalos). En consecuencia, la evaluación o juicio,*

que se establece sobre la medida y su forma de expresarla, conduce a estipular la posibilidad de precisión y sirve de medio de control en las actividades de medición. Este juicio incluye el proceso de estimación; en este proceso se toman decisiones sobre qué cantidades pueden ser despreciadas, con base a reglas, como el **truncamiento** o el **redondeo**.

2. Los errores en la medición introducen la confrontación entre lo exacto y lo aproximado, entre lo posible y lo inalcanzable.
3. En un proceso de medición, las cantidades que se obtienen de la medida son forzosamente aproximadas. Por tal razón, es necesario establecer procedimientos sistemáticos para mejorar el grado de precisión de la medida.
4. La naturaleza y el origen de los errores, se consideran amenazantes y se confunden con una falta. Es por estas razones que los instrumentos de medida, y la medición efectiva se evitan para no cuestionar la posibilidad de su falta de fidelidad o su falsedad debidas a la imprecisión del instrumento de medida.

# ¿Cuánto estuve cerca entre mi cálculo aproximado y la distancia real?

## ! IDEAS CLAVE:

- Diferencia entre el valor real y el valor estimado.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Determino que no es posible establecer con exactitud la medida que se requiere.
- Calculo la diferencia entre el valor real y el valor estimado.

### Primera sesión

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes comparan la medida que presumen de manera supuesta con la medida que se aproxima al valor exacto, a partir de algunas situaciones.

#### Materiales:

- Palos (para simular palos de golf).
- Papel.
- Cinta ancha transparente.

#### Desarrollo propuesto:

Presente nuevamente a los estudiantes el juego ¿Qué tan lejos puedo lanzar la pelota? con una modificación que se enuncia a continuación:

*El juego consiste en lanzar una pelota lo más lejos posible utilizando como herramienta un palo (simulación del golf). Posterior a ello el estudiante que está esperando su turno determina que tan lejos la lanzó su compañero, desde el punto donde golpeó la pelota, (enuncia una medida) y finalmente establece dicha distancia empleando algún método. Gana el juego no sólo quien lance más lejos la pelota sino también quien haya dado el golpe se acerque más a la medida a la que cayó la pelota.*

Permita que los estudiantes realicen algunas prácticas de lanzamiento; para ello deben colocar la pelota en el piso, tomar el palo en sus manos y pegarle a la misma (garantice que los estudiantes estén en un espacio abierto y que no se vayan a lastimar con el palo). Además, ayúdeles a iden-

tificar los tres momentos del juego (lanzar la pelota, enunciar la medida y utilizar un método). Pida a los estudiantes que conformen grupos de tres personas. Facilítele a cada estudiante la siguiente tabla, en la que pueden registrar la información recolectada durante el juego.

Nombre:		
Ronda	Medida inicial (apreciación)	Medida a partir de un método
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Retomadas las reglas del juego, permita que los estudiantes vivan la experiencia alrededor de 30 minutos. Cada uno realiza por lo menos 10 veces la experiencia. Recuérdeles que deben enunciar la medida inicial de manera apreciativa y que posteriormente deben implementar un método que les permita establecer la medida más cercana al valor exacto. Después de que los estudiantes han jugado, pregunte: ¿A qué distancia cayó la pelota que se encuentra más lejos?, ¿a qué distancia está la pelota que se encuentra más cerca del sitio de lanzamiento?, ¿qué tanto me equivoque entre la medida inicial y medida establecida a partir de un método?, ¿por qué se presentó esa diferencia?, ¿cómo podemos determinar el valor de esa distancia? Frente a esta última pregunta, algunos estudiantes responderán que usando los pies (tal como se observa en la figura). Quizás cada estudiante que conforma un grupo realice las mediciones teniendo en cuenta la medida de su pie y no la del compañero; si sucede esto pregúnteles ¿cómo podemos garantizar que la medida que toma Juan es la misma que toma Camilo?, ¿qué debemos hacer para garantizar que la medidas son comparables? Permita que los estudiantes discutan



al respecto y establezcan un acuerdo, el cual puede estar orientado a medir la distancia con los pies de un sólo compañero o pueden tomar la decisión de buscar otro elemento que les permita realizar dichas mediciones.

Recuerde que algunos estudiantes tomarán como referencia su cuerpo para enunciar las medidas solicitadas o ya cuentan con algún punto de referencia para enunciar las mismas. Quizás algunos afirmen: “*si midiera con pasos habrían 10, y como cada paso mide aproximadamente 50 cm, entonces con dos pasos hago un metro y con 10 paso 5 metros*”; otros dirán: “*Si la cancha mide aproximadamente 12 metros entonces mi pelota está a siete metros*”. Confronte este tipo de afirmaciones con lo sucedió durante la actividad.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes establecen la medida de la distancia, tanto de manera apreciativa como acercándose al valor exacto, que separan algunos sitios del colegio.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.

#### Desarrollo propuesto:

Retome la actividad propuesta en la segunda sesión de la semana dos; para ello copie la tabla en el tablero, que resultó de la experiencia que se vivió. Nuevamente, establezca el punto de partida desde donde se toman las medidas (debe ser igual al establecido anteriormente, el cual podría ser inicialmente el aula de clase y recuerde las distancias trabajadas). Ahora, permita que los estudiantes establezcan la distancia de dichos lugares a partir de un método, en el cual pueden emplear como instrumentos partes del cuerpo u otros instrumentos. Tome el tiempo suficiente para que los niños realicen la actividad. Esté muy atento a las acciones que realizan los niños, para ello recolecte evidencias que le permita enriquecer la reflexión más adelante, por ejemplo, es factible que algunos niños realicen de nuevo un croquis del recorrido que harían para llegar al sitio indicado y coloquen las medidas respectivas a medida que avanzan en la búsqueda del objetivo. Para ello pueden utilizar los pasos o cualquier otro instrumento que les permita medir. Permita que cada estudiante comparta sus producciones, y revise que sus intervenciones estén acompañadas de su respectiva explicación. Acompañe tales explicaciones formulando preguntas como: *¿Qué recorrido siguió para llegar al sitio indicado?, ¿es el mismo que efectuó en la segunda semana?, ¿cuál es la distancia que separa el*

*salón de ese lugar?, ¿cómo hizo para determinarla?, ¿esta medida se diferencia de la de los otros compañeros, por qué?, ¿esta medida se diferencia de la que propuso en la semana 2, por qué?* Proceda así con cada uno de los estudiantes. Registre la información en el tablero a través de una tabla de tal manera que le permita comparar lo que se hizo en la semana 2 con respecto a lo obtenido en esta semana.

Una vez registrados los datos, realice preguntas a partir de la información recolectada como: *¿Cuándo se puede afirmar que hay una buena apreciación o mala aprecia-*

Niño	Juan	Pedro	María	Diana	José	...
Lugares						
Baño de los niños						
Sala de profesores						
...						

*ción?, ¿qué estudiante hizo una apreciación más exacta de las distancias solicitadas?, ¿por qué crees que la apreciación fue buena? Frente a esta última pregunta algunos estudiantes responderán que es buena porque la tabla inicial coincide con los resultados obtenidos al utilizar un instrumento de medida. Recuerde a los estudiantes que lo que han venido realizando corresponde con el proceso de estimación, el cual no es más que un juicio sobre la medida de una cantidad, que depende de las circunstancias individuales del que lo expresa.*

Secuencia didáctica: *¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?*

# ¿Cuánto mide, si sé que esto mide aproximadamente 50 cm?

## IDEAS CLAVE:

- La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; la estimación se aproxima tanto como la situación lo precise.

## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Identifico que, en algunos casos, es necesario la precisión al medir.
- Diferencio lo exacto de lo aproximado.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes establecerán las medidas de algunos objetos o distancias entre dos puntos a partir de una unidad de medida dada.

#### Materiales:

- Palo de 50 cm aproximadamente.

#### Desarrollo propuesto:

Proponga a los estudiantes tomar las medidas de algunos objetos presentes en las instalaciones del colegio, como por ejemplo el ancho del tablero, el alto del salón, lo largo de la cancha, el alto de la ventana o de la puerta, utilizando como unidad de medida el palo que mide aproximadamente 50 cm. Permita que los estudiantes propongan otras unidades de medida si así lo desean.

Realizada la actividad, retome parte de la historia de la medida y comparta con los niños el siguiente texto:

El desarrollo de la medida a lo largo de la historia está estrechamente ligado a las acciones prácticas de los grupos sociales. La medida nace y se complejiza con la necesidad de resolver problemas prácticos y en muchos casos

vinculada directamente a la producción e intercambio. Por ejemplo, en donde predominaba la explotación de oro en polvo, alcanzó un desarrollo muy apreciable el sistema de pesas. Por otra parte, la extensión territorial crea la necesidad de utilizar cierta terminología en cuanto a las medidas de longitud, y por tal razón surgen unidades de carácter empírico como tiros de bastón, alcance de la voz, entre otros. Aunque la historia de la medida, como la historia de cualquier otra idea humana, no es lineal, se pueden identificar



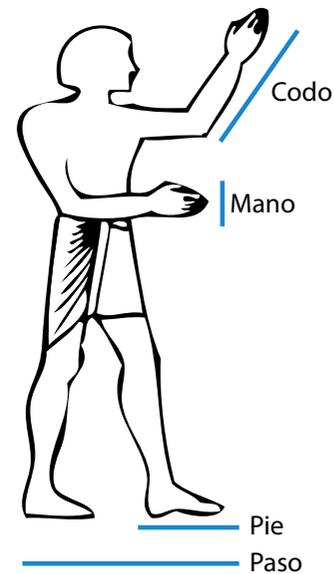
algunas conquistas alcanzadas a lo largo de los siglos que ofrecen alguna idea de un proceso de complejización.

**Primera conquista.** Las unidades de medición están ligadas de forma directa a las condiciones, a los objetos o a los resultados inmediatos de la labor humana. Parte de este periodo tiene que ver con las nociones metrológicas del hombre, es decir, referentes antropométricos donde el hombre usó partes de su cuerpo para distinguir unidades de medida.

**Segunda conquista.** Paso de las medidas concretas y locales a las medidas abstractas, por ello más universales. Dando paso a la idea de convención.

**Tercera conquista.** Las unidades de medición están marcadas por el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Las unidades de medida son conceptualizadas, por lo tanto es posible reproducirlas en condiciones de laboratorio.

Ahora, reflexione sobre la actividad realizada planteando preguntas como: *¿Fue más fácil medir teniendo como referencia una unidad de medida?, ¿en qué momento se hace difícil el acto de medir y hay que recurrir al proceso de*



*estimación?, ¿cómo se relaciona la actividad con lo sucedido a lo largo de la historia de la medición?, ¿para medir cualquier magnitud, tales como el peso, la capacidad, la longitud, o el tiempo, se empleará la misma unidad de medida? Concluya la reflexión rescatando la importancia de la unidad de medida y cómo la misma hace parte del proceso de estimación.*

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes establecerán las medidas de algunos objetos o distancias a partir de una unidad de medida dada.

#### Materiales:

- Palo de 50 cm para cada grupo.

#### Desarrollo propuesto:

Nuevamente presente a los estudiantes la situación propuesta para esta secuencia, la cual puede enunciar de la siguiente manera:

*En algunas zonas rurales de Colombia existen varios factores que impiden que los niños no puedan desplazarse cómodamente hasta sus escuelas; entre ellos está el invierno, pues los ríos aumentan su caudal bloqueando las carreteras y la distancia que separa a las instituciones de las viviendas, puesto que les toca caminar varios kilómetros para llegar a sus centros educativos. Para ayudarles, una entidad ha invitado a estudiantes y docentes a participar en un estudio que busca determinar la distancia promedio que recorren diariamente los niños de estas zonas en el trayecto hogar y colegio, con el fin de asignar un transporte escolar según las necesidades.*

Organice grupos de tres estudiantes e invítelos a responder algunas de las preguntas que inicialmente se plantearon, tales como: *¿A cuántos niños debo preguntarles la distancia que recorren diariamente?, ¿qué necesito para medir las distancias solicitadas y qué materiales puedo utilizar?*, Quizás algunos estudiantes respondan que necesita un metro (es decir, una cinta métrica), otros dirán que podrían medir dichas distancias con los pasos. Aproveche esta intervención para indicarles que el reto de esta sesión es medir la distancia que hay del colegio a una de las casas de los niños empleando el palo de 50 cm (ubique una casa que no sea muy lejana pero tampoco demasiado cerca del colegio, además busque el apoyo de algunos padres de familia, pues algunos estudiantes pueden tomar recorridos distintos) Además, retome lo trabajado en la semanas anteriores para enriquecer la actividad que se propone a continuación. Permítale elaborar un plan de trabajo, por lo tanto sugiérales que deben tener en cuenta aspectos como el recorrido que realizarán, la manera de registrar la información, la distribución de responsabilidades, entre

otros. Realizado el recorrido y tomado los datos pertinentes, regresen nuevamente a la institución y compartan los aprendizajes adquiridos; para ello puede formular preguntas como: *¿Cuál fue el mayor obstáculo para establecer la distancia solicitada?, ¿Todos hicieron el mismo recorrido?, ¿cuál recorrido nos favorece más para el estudio que se está realizando?, ¿se puede afirmar que la medida tomada corresponde a un valor exacto?, ¿cómo haremos con el resto de las casas?,...* Recolecte evidencias y tome los apuntes necesarios que permitan enriquecer el trabajo que se realizará en la semana 7 y como cierre de esta sesión comparta los aspectos más relevantes.

*En los procesos de estimación del resultado de una operación o de la medida de una cantidad, el cálculo mental tiene un papel muy destacado. No quiere decir esto que la estimación tenga, como única herramienta de resolución, los algoritmos mentales de cálculo. Una estimación más precisa puede realizarse utilizando papel y lápiz o calculadora cuando se efectúe dicho procedimiento, no obstante para cualquier estimación se recomienda motivar constantemente el cálculo mental.*

*A partir de los desempeños propuestos en las semanas 1, 2, 3 y 4 y las evidencias de las actividades desarrolladas, analice tanto la información para determinar el alcance de los aprendizajes que han tenido los estudiantes, así como las dificultades, y diseñe las estrategias que permitan promover el mejoramiento.*

# ¿Cómo puedo representar estas medidas?

## ! IDEAS CLAVE:

- Números decimales, una forma de representar la idea de aproximación.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Represento distancias muy precisas empleando los números decimales.
- Determino que entre dos números dados hay más números.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes medirán su estatura, determinarán el valor numérico de la misma y compararán los resultados obtenidos.

#### Materiales:

- Cinta métrica o metro.
- Calculadora.

#### Desarrollo propuesto:

Los estudiantes, inicialmente por parejas, determinarán la estatura de su compañero únicamente observándolo sin utilizar ningún instrumento de medida. Posteriormente se invita a los estudiantes a que tomen las medidas respectivas para determinar su valor aproximado. Para ello solicite a cada uno de los estudiantes, manteniendo las parejas, que mida su estatura empleando la cinta métrica y que registre, en el tablero, el valor numérico obtenido (para esta actividad se recomienda contar con una cinta métrica o pedir a los estudiantes que traigan el dato



de su casa. Recuérdeles que se requiere el dato con dos cifras decimales). Recolecte las evidencias necesarias que le permitan enriquecer el momento de discusión. Teniendo el dato de todos los estudiantes se inicia la reflexión, acompañada de las siguientes preguntas: *¿De los datos obtenidos, cuál es el de mayor valor y cuál el de menor valor?, ¿qué se tiene en cuenta para determinar dicho orden?* Algunos estudiantes tendrán en cuenta las cifras decimales para realizar dichas comparaciones, por tal razón, amplíe esta idea apoyándose en tablas para realizar la comparación respectiva. Se recomienda usar colores para incluir el nombre de cada posición de los números que determina la estatura de alguien. Observe el siguiente ejemplo en el que se comparan las medidas de la estatura de dos personas.

- La posición que ocupa cada una de las cifras se representa en la siguiente tabla de valor posicional.

metros	decímetros	centímetros
1	2	2

metros	decímetros	centímetros	milímetros
1	2	1	5

- El número de dígitos de los números a comparar no es igual, puesto que 1,22 tiene dos dígitos decimales y 1,215 tiene tres.
- Al comparar la parte entera (metros) en cada uno de los números se observa que es la misma.

Parte entera                      Parte entera  
 $\overbrace{1}^{\text{Parte entera}}, 22 \quad \overbrace{1}^{\text{Parte entera}}, 215$

- Al comparar los dígitos que ocupan la posición de decímetros en cada uno de los números se observa que es la misma.

Parte entera                      Parte entera  
 $\overbrace{1}^{\text{Parte entera}}, 22 \quad \overbrace{1}^{\text{Parte entera}}, 215$   
 Decímetros

- Al comparar los dígitos que ocupan la posición de las centímetros en cada uno de los números se observa que dos es mayor que uno.

Parte entera                      Parte entera  
 $\overbrace{1}^{\text{Parte entera}}, 22 \quad \overbrace{1}^{\text{Parte entera}}, 215$   
 Centímetros

- Por lo tanto, 1,22 m es mayor que 1,215 m.

Permita que los estudiantes comparen las medidas que han tomado y las ordenen de mayor a menor o viceversa. Además, recalque que una forma de expresar con mayor precisión algunas de las medidas es a través de los números decimales, los cuales están conformados por una parte entera y otra decimal. Este momento es adecuado para cerrar la sesión.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes realizarán la lectura de una situación en la cual identificarán la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación.

#### Desarrollo propuesto:

Presente a los estudiantes el siguiente reporte deportivo, relacionado con el salto en arena.

En el Mundial de Atletismo, Mironchyk-Ivanova, **según los registros, realizó un salto de 6,90 metros.** Inicialmente, el oro fue para ella, pero uno de los jueces se percató que su cabello había impactado antes en la arena, por lo que el salto final que realizó fue de 6,74 metros. El oro se lo acabaría llevando la estadounidense **Brittney Reese con 6,82.** Kucherenko fue plata con 6,77 y Radevica se quedó con el bronce con 6,76. Lamentablemente para Mironchyk-Ivanova pasó de campeona mundial a un triste cuarto puesto.



Ahora invite a los estudiantes a reflexionar sobre lo que se evidencia en la noticia deportiva. Acompañe de preguntas tales como: *¿Quién perdió la medalla de oro?, ¿por qué razón la perdió?, ¿Finalmente, quién ganó la medalla de oro?, ¿Por qué se hace necesario en esta situación un cálculo lo más exacto posible?, ¿Mironchyk-Ivanova, finalmente ganó alguna medalla?, ¿por qué?* Inicialmente permita de manera individual los estudiantes elaboren de manera escrita sus primeras explicaciones a las preguntas que se plantean. Posteriormente conforme grupos de trabajo, entre tres o cinco estudiantes, para que compartan las respuestas elaboradas. Finalmente, permita que algunos grupos socialicen sus producciones. En este momento se evidencia la importancia o la necesidad de un cálculo exacto para tomar una decisión, y que de no ser por la precisión que nos brindan los números decimales quizás no se podría determinar la ganadora de la medalla de oro.

Como cierre de esta semana, invite a los estudiantes a proponer ejemplos o situaciones en donde se hace necesario un cálculo exacto o un cálculo aproximado.

Secuencia didáctica: *¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?*

# ¿Qué tanto me equivoque al establecer las medidas?

## IDEAS CLAVE:

- Importancia del error en la idea de aproximación.
- Técnicas de estimación (truncamiento y redondeo).

## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Determino cuánto me equivoque al medir.
- Identifico y aplico diferentes técnicas de estimación.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes determinarán la cantidad de semillas que hay en un tarro y establecerán que tanto se equivocaron al establecer dicha medida.

#### Materiales:

- Tarro de plástico no transparente con tapa.
- Semillas o piedras pequeñas.

#### Desarrollo propuesto:

Conforme grupos de tres estudiantes y presente la siguiente actividad: Uno de los estudiantes toma cierta cantidad de semillas y las introduce en el tarro sin que los otros dos vean; lo tapa con la mano, lo agita y les pregunta a sus compañeros "¿Cuántas semillas creen que hay en el tarro?" Cada uno de los otros dos estudiantes podrá dar una sola respuesta que se registrará en la siguiente tabla. Tenga en cuenta los siguientes pasos: Primero, los estudiantes en turno dicen el número y lo



registran en la tabla, después quien tiene el tarro cuenta el número de semillas y lo registra en la tabla teniendo en cuenta la ronda que se esté jugando; finalmente se encierra con algún color quien estuvo más cerca. Observe el siguiente ejemplo:

Ronda	Juan	Diana	Camilo	No de semillas en el tarro
1	7	11		12
2	13		22	15
3		17	19	18
4				
5				

Cerciórese que cada estudiante realice las dos cosas, la de agitar el tarro y la llenar la tabla. Para ello establezca un tiempo prudencial que les permita realizar la expe-

riencia varias veces. Posteriormente, organice el grupo en mesa redonda de tal manera que permita compartir a los estudiantes los resultados obtenidos. Acompañe de preguntas como: ¿Quién se acercó más veces a la cantidad de semillas que habían en el tarro?, ¿qué estrategia utilizó el estudiante ganador para determinar la cantidad de semillas? (algunos estudiantes responderán de inmediato que el oído, puesto que si hay poquitas semillas entonces el tarro suena mucho y si hay muchas casi no suena). ¿En alguna ronda ambos estudiantes ganaron, por qué sucedió esto? A lo que pueden responder los niños: “En el tarro habían 18 semillas pero Diana dijo hay 17 y Camilo dijo hay 19; como ambos están a una unidad, uno por encima y el otro por debajo, entonces ambos ganan”. Aproveche esta intervención para hacer referencia al redondeo por exceso o por defecto. Además como cierre de esta sesión, retome la pregunta de la semana y respóndala teniendo en cuenta esta actividad.

*La estimación produce resultados aproximados porque en los procesos de estimación se transforman o sustituyen los datos por número sencillos, es decir, por números que sean fáciles de memorizar y asequibles para las operaciones aritméticas mentales. Hay varias formas de producir, a partir de los datos exactos, número sencillos.*

- Números sencillos por truncamiento:** Truncar un número consiste en tomar sólo los dos dígitos de la izquierda más significativos según sea la situación y reemplazar por ceros esos dígitos, siendo estos últimos valores enteros. Un ejemplo de un truncamiento con el número 3572 sería 3570, o 3500, o 3000, o se puede operar con el número tal como queda y añadir posteriormente los ceros al resultado.
- Número sencillos por redondeo:** Redondear un número, igual que el truncamiento, consiste en tomar sólo los dígitos de la izquierda más significativos de acuerdo a las diferentes situaciones, con la condición de que si la primera cifra que se desecha es 0, 1, 2, 3 o 4, entonces la última cifra (y todas las demás) se mantienen igual; en otro caso la última cifra que se mantiene aumenta en una unidad respecto del número que redondeamos; en el ejemplo anterior los posibles redondeos de 3572 serían 3570, 3600 y 4000.
- Números sencillos por sustitución:** Cuando un dato resulta complicado para operar con él, puede ser sustituido por otro próximo, con lo que desaparece la dificultad. Por ejemplo, para obtener un resultado estimado de la operación  $36894 \div 7$ , el seis es sustituido por cifras redondas de tal manera que 36894 queda 35000 y así la división  $35000 \div 7$  resulta más sencilla de realizar mentalmente.

## Segunda sesión

### Actividad 1

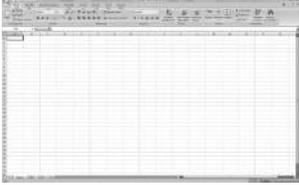
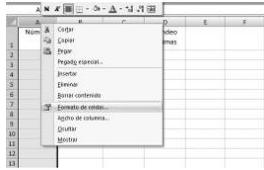
**En qué consiste:** Los estudiantes aplican reglas en el proceso de estimación como lo es el truncamiento o el redondeo.

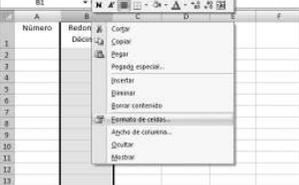
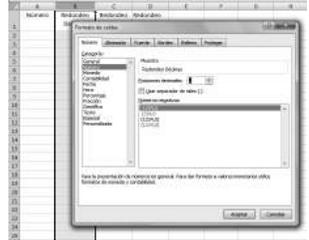
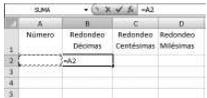
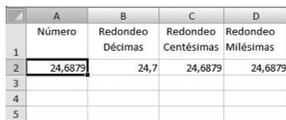
#### Materiales:

- Computadores, si es posible.

#### Desarrollo propuesto:

Si cuenta con la posibilidad de hacer uso de la sala de informática, plantee a los estudiantes el siguiente ejercicio siguiendo cada uno de los pasos:

PASO 1	PASO 2	PASO 3	
Ingrese a Microsoft Office Excel	En las siguientes celdas digite los nombre respectivos Celda A1: <b>Número</b> Celda B1: <b>Redondeo Décimas</b> Celda C1: <b>Redondeo Centésimas</b> Celda D1: <b>Redondeo Milésimas</b>	Seleccione la columna A, dé clic derecho y seleccione formato de celdas. En formato de celdas, dé clic en la pestaña <b>Número</b> , después en <b>posiciones decimales</b> digite 4. Finalmente de aceptar.	
			

PASO 4	PASO 5	PASO 6
Ahora seleccione la columna B, dé clic derecho y seleccione formato de celdas. En formato de celdas, dé clic en la pestaña <b>Número</b> , después en <b>posiciones decimales</b> digite 1. Finalmente de aceptar. Realice el mismo procedimiento para las dos columnas que hacen falta, pero digite 2 en la tercera columna (Redondeo centésimas) y 3 en la cuarta (redondeo Milésimas)	Ubíquese en la celda B2, digite "=", seleccione la celda A2 y finalmente dé <b>Enter</b> . Realice el mismo proceso en las celdas C2 y D2.	Finalmente, digite un número en la columna A (celda A2) de cuatro cifras decimales. Observe lo que sucede. NOTA: Copie la fórmula de la columna B2 a D2, en las celdas inmediatamente inferiores, para que puedan escribir otros números y obtener los cálculos requeridos.
 	  	

Acompañe el paso 6 con las siguientes preguntas: *¿Qué le sucedió al número 24,6879 en la columna que se titula **Redondeo Milésimas**?* Quizás algunos estudiantes respondan que "de cuatro cifras decimales se pasó a tener tres cifras decimales, pero que la última cambio de siete a nueve". Aproveche esta intervención para informar a los estudiantes que existen varias técnicas que permiten producir, a partir de los datos exactos, número sencillos. Entre ellas está el *redondeo*, el cual consiste en tomar sólo los dígitos de la izquierda más significativos de acuerdo a las diferentes situaciones, con la condición de que si la primera cifra que se

desecha es 0, 1, 2, 3 o 4, entonces la última cifra (y todas las demás) se mantienen igual; en otro caso la última cifra que se mantiene aumenta en una unidad respecto del número que redondeamos; en el ejemplo anterior los posibles redondeos de 3572 a cifras con cero serían 3570, 3600 y 4000. Ahora, pregunte: *¿Qué le sucedió al número 24,6879 en la columna que se titula **Redondeo Centésimas**?* Algunos estudiantes se apoyarán en la anterior información para exponer sus explicaciones. Proponga a los estudiantes que digiten otros números decimales que por lo menos tengan cuatro cifras decimales (recuerde copiar la fórmula de

## SEMANA 6

la columna B2 a D2, en las celdas inmediatamente inferiores, para que puedan escribir otros números y obtener los cálculos requeridos)

De no contar con la sala de informática, presente a los estudiantes la siguiente tabla y realicen una reflexión similar a la anterior.

Número	Redondeo Décimas	Redondeo Centésimas	Redondeo Milésimas
123,5943	123,6	123,59	123,594
172,4628	172,5	172,46	172,463

A manera de evaluación y como parte de cierre de esta sesión, pida a los estudiantes que completen la siguiente tabla.

Número	Redondeo Décimas	Redondeo Centésimas	Redondeo Milésimas
83,3869			
	2,9	2,88	2,876
342,9564			
	71,1	71,07	71,074

*La aproximación es un término de uso frecuente en cálculo numérico, que tiene relación con la estimación pero no es un sinónimo (Hall, 1984). Sowder (1989) también analiza la diferencia entre ambos términos. Más detalladamente en Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) se define la aproximación y su relación con la estimación. **Aproximar** es encontrar un resultado suficientemente preciso para un determinado propósito. La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; se aproxima tanto como la situación lo precise. Tiene como herramientas los teoremas del cálculo (aproximado) o la teoría de errores y los algoritmos de lápiz y papel o con calculadora. La estimación tiene en cuenta el error pero de manera menos precisa. A veces, éste no tiene un control asegurado. La valoración se realiza por lo general de forma mental y el valor asignado admite distintas aproximaciones dependiendo de quién realice la valoración. La estimación puede emplear algunos de los teoremas del cálculo aproximado en la medida que estos teoremas puedan aplicarse mentalmente.*

Secuencia didáctica: *¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?*

# ¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?

## IDEAS CLAVE:

- La idea de estimación y aproximación se emplea en diversos contextos.

## DESEMPEÑOS ESPERADOS

- Realizo estimaciones de medidas relacionadas con diferentes magnitudes.
- Justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable de las respuestas obtenidas.
- Determino estrategias para buscar, seleccionar y almacenar información.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes se enfrentan nuevamente a la pregunta central de la secuencia, donde proponen un plan de trabajo para resolver la pregunta y lo ejecutan.

#### Materiales:

- Instrumentos de medida.
- Tablas de registro.

#### Desarrollo propuesto:

Plantee la pregunta correspondiente a la secuencia: *¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?*

Permita que los estudiantes, organizados en grupos de tres, cuatro o cinco estudiantes, respondan a la misma e invítelos a realizar un plan de trabajo. Posterior a ello permita que compartan, grupo a grupo, los planes elaborados con el fin de enriquecerlos desde el aporte de todos. Tenga presente lo trabajado en las anteriores semanas. Quizás algunos grupos contemplen en su plan de trabajo algunos de los siguientes aspectos: 1) Establecer las casas a visitar

para determinar la distancia que las separa del colegio, 2) determinar el instrumento de medida, 3) establecer un acuerdo con el resto de los grupos frente a la unidad en la que se entregarán los resultados, 4) realizar las mediciones correspondientes y registrarlas en una tabla de datos, 5) unificar con el resto del grupo la información recolectada y 6) determinar el promedio de dichas distancias. A lo largo de la reflexión plantee preguntas como: *¿Es necesario visitar todas las casas?, ¿cómo*

*determinar cuáles si y cuáles no?, ¿qué aspectos se pueden incluir en el plan de cada grupo?*, entre otras. Elaborados y enriquecidos los planes de trabajo proponga a los estudiantes ejecutar los mismos; para ello disponga del tiempo necesario en el que se puedan realizar los cuatro primeros pasos expuestos anteriormente. Para el paso 4, pida el apoyo a los padres de familia de tal manera que puedan acompañar a los estudiantes en los diferentes recorridos, si lo considera necesario.

### Segunda sesión

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Los estudiantes se enfrentan nuevamente a la pregunta central de la secuencia, donde proponen un plan de trabajo para resolver la pregunta y lo ejecutan.

#### Materiales:

- Tablas de registro.
- Papel periódico.
- Marcadores.
- Calculadora o Computador.

#### Desarrollo propuesto

Inicie la sesión retomando la experiencia vivida en la primera parte. Acompañe de preguntas como: *¿Visitaron las casas de todos los niños?, Explique su respuesta, ¿qué instrumento les permitió medir con mayor facilidad y por qué?, ¿cuál casa se encontraba más lejos y cuál más cerca?* Además, recuerde aquellas preguntas que se plantearon en la semana 1, puesto que en este momento cobran especial relevancia: *¿Qué es distancia promedio?, ¿a cuántos niños debo preguntarles la distancia que recorren diariamente?, ¿en cuántas zonas rurales se está haciendo este estudio?, ¿es necesario comunicarme con las otras zonas?, ¿qué se necesita para medir las distancias solicitadas y qué materiales puedo utilizar para medir la distancia solicitada?* Ahora proponga a los estudiantes realizar un cartel que les permita compartir con el resto del grupo los

resultados obtenidos; para ello entrégueles el pliego de papel periódico y los marcadores. Disponga de por lo menos unos 30 minutos para esta actividad. Posteriormente, permita que los estudiantes compartan sus resultados. Obtenidos los datos de cada una de las distancias, quizás algunos estudiantes planteen la necesidad de calcular su promedio e incluso utilicen la idea de truncamiento para realizar los cálculos. Si es posible hacer uso de la sala de informática, pueden registrar los datos obtenidos en una hoja de Excel y calcular el promedio, de tal manera que se pueda tener un dato de la institución o en su defecto se recomienda contar con una calculadora para las operaciones pertinentes. Obtenido el dato de la institución, procure compartirlo con otras que hayan vivido la experiencia y así ampliar la información solicitada por la entidad, con respecto a las distancias entre los centros educativos y zonas rurales. Este es un momento oportuno para cerrar el trabajo realizado durante esta semana; retome los aspectos más relevantes relacionados con la idea de estimación de tal manera que le permita aclarar las dudas que aún puedan tener los estudiantes.

Secuencia didáctica: ¿Cómo determinar la distancia promedio diaria que recorren los estudiantes de zonas rurales, desde la casa hasta el colegio?

# Cierre y Evaluación

## IDEAS CLAVE:

- El proceso de estimación está presente en lo social, económico y las ciencias.

## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.

### Primera sesión

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Se presentaran diferentes situaciones problema sobre los cuales se puede recurrir al proceso de estimación para poder dar una solución a las mismas.

#### Materiales:

- Facturas.

#### Desarrollo propuesto:

Presente a los estudiantes cada una de las siguientes facturas e invítelos a calcular mentalmente y de manera aproximada el valor de cada una de ellas. Inicialmente lo harán individualmente y posteriormente se organizan en grupos de tres estudiantes para compartir lo realizado.

Factura 1	Factura 2	Factura 3																																																																																																																																					
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Código</th> <th>Descripción</th> <th>Valor</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>349</td><td>SERVIL FAMIL X 100</td><td>2.500 A</td></tr> <tr><td>4x9.150</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>321</td><td>CAFE LA BASTILLA50</td><td>36.600 E</td></tr> <tr><td>241963</td><td>MEZCLADOR X500U 70</td><td>2.100 A</td></tr> <tr><td>461658</td><td>VASO 7OZ OPAL DOMI</td><td>4.100 A</td></tr> <tr><td>34855</td><td>PANELON RAF 2000 G</td><td>5.790</td></tr> <tr><td>34855</td><td>PANELON RAF 2000 G</td><td>5.790</td></tr> <tr><td>143</td><td>AZUCAR MANUE X 5</td><td>6.100 E</td></tr> <tr><td>143</td><td>AZUCAR MANUE X 5</td><td>6.100 E</td></tr> <tr><td>946221</td><td>TE LIPTON BERRIEX2</td><td>4.290 A</td></tr> <tr><td>229652</td><td>PAPEL HIG/3EN1 12</td><td>14.390 A</td></tr> <tr><td>991751</td><td>OF 2 SALVO LIMON 5</td><td>4.450 A</td></tr> <tr><td>651512</td><td>AJAX NARANJ LIM 10</td><td>5.290 A</td></tr> <tr><td>133243</td><td>DETER/AS 1000GR LI</td><td>4.830 A</td></tr> <tr><td>42119</td><td>CERA BUFALO AMARIL</td><td>6.260 A</td></tr> <tr><td>42119</td><td>CERA BUFALO AMARIL</td><td>6.260 A</td></tr> <tr><td>257035</td><td>TOALLA FACIAL 30X3</td><td>2.300 A</td></tr> <tr><td>257035</td><td>TOALLA FACIAL 30X3</td><td>2.300 A</td></tr> </tbody> </table>	Código	Descripción	Valor	349	SERVIL FAMIL X 100	2.500 A	4x9.150			321	CAFE LA BASTILLA50	36.600 E	241963	MEZCLADOR X500U 70	2.100 A	461658	VASO 7OZ OPAL DOMI	4.100 A	34855	PANELON RAF 2000 G	5.790	34855	PANELON RAF 2000 G	5.790	143	AZUCAR MANUE X 5	6.100 E	143	AZUCAR MANUE X 5	6.100 E	946221	TE LIPTON BERRIEX2	4.290 A	229652	PAPEL HIG/3EN1 12	14.390 A	991751	OF 2 SALVO LIMON 5	4.450 A	651512	AJAX NARANJ LIM 10	5.290 A	133243	DETER/AS 1000GR LI	4.830 A	42119	CERA BUFALO AMARIL	6.260 A	42119	CERA BUFALO AMARIL	6.260 A	257035	TOALLA FACIAL 30X3	2.300 A	257035	TOALLA FACIAL 30X3	2.300 A	<table border="1"> <tbody> <tr><td>7702985300986</td><td>LIMPION ESTAMPA</td><td>8240 D</td></tr> <tr><td>7703824171392</td><td>TOALLA SECANTE</td><td>2900 D</td></tr> <tr><td>7702985407548</td><td>TOALLA MANOS 41</td><td>7900 D</td></tr> <tr><td colspan="2">SUBTOTAL</td><td>19040</td></tr> <tr><td>7702985407548</td><td>TOALLA MANOS 41</td><td>7900 D</td></tr> <tr><td>7702985407708</td><td>TOALLA MANOS 41</td><td>8900 D</td></tr> <tr><td>7702985407708</td><td>TOALLA MANOS 41</td><td>8900 D</td></tr> <tr><td colspan="2">SUBTOTAL</td><td>76340</td></tr> </tbody> </table>	7702985300986	LIMPION ESTAMPA	8240 D	7703824171392	TOALLA SECANTE	2900 D	7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D	SUBTOTAL		19040	7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D	7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D	7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D	7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D	7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D	7702985407708	TOALLA MANOS 41	8900 D	7702985407708	TOALLA MANOS 41	8900 D	SUBTOTAL		76340	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Descripcion</th> <th>Cant.</th> <th>Vr.Und.</th> <th>Vr.Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>3000166</td><td>UND</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>BALASTO ELECTRONICO 2X96 T12 120V *</td><td>1</td><td>21.552</td><td>21.552</td></tr> <tr><td>3170106</td><td>UND</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>TUBO 96" T12 5000K MAXI "REPOSICION"</td><td>2</td><td>7.586</td><td>15.172</td></tr> <tr><td>3600017</td><td>JGO</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>SOCKET SLIM LINE ECON. - MED</td><td>2</td><td>862</td><td>1.724</td></tr> <tr><td>3710041</td><td>UND</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>MUEBLE COMERCIAL 2X96 - ELECTROCON</td><td>1</td><td>16.379</td><td>16.379</td></tr> <tr><td>Subtotal</td><td></td><td></td><td>54.827</td></tr> </tbody> </table>	Descripcion	Cant.	Vr.Und.	Vr.Total	3000166	UND			BALASTO ELECTRONICO 2X96 T12 120V *	1	21.552	21.552	3170106	UND			TUBO 96" T12 5000K MAXI "REPOSICION"	2	7.586	15.172	3600017	JGO			SOCKET SLIM LINE ECON. - MED	2	862	1.724	3710041	UND			MUEBLE COMERCIAL 2X96 - ELECTROCON	1	16.379	16.379	Subtotal			54.827
Código	Descripción	Valor																																																																																																																																					
349	SERVIL FAMIL X 100	2.500 A																																																																																																																																					
4x9.150																																																																																																																																							
321	CAFE LA BASTILLA50	36.600 E																																																																																																																																					
241963	MEZCLADOR X500U 70	2.100 A																																																																																																																																					
461658	VASO 7OZ OPAL DOMI	4.100 A																																																																																																																																					
34855	PANELON RAF 2000 G	5.790																																																																																																																																					
34855	PANELON RAF 2000 G	5.790																																																																																																																																					
143	AZUCAR MANUE X 5	6.100 E																																																																																																																																					
143	AZUCAR MANUE X 5	6.100 E																																																																																																																																					
946221	TE LIPTON BERRIEX2	4.290 A																																																																																																																																					
229652	PAPEL HIG/3EN1 12	14.390 A																																																																																																																																					
991751	OF 2 SALVO LIMON 5	4.450 A																																																																																																																																					
651512	AJAX NARANJ LIM 10	5.290 A																																																																																																																																					
133243	DETER/AS 1000GR LI	4.830 A																																																																																																																																					
42119	CERA BUFALO AMARIL	6.260 A																																																																																																																																					
42119	CERA BUFALO AMARIL	6.260 A																																																																																																																																					
257035	TOALLA FACIAL 30X3	2.300 A																																																																																																																																					
257035	TOALLA FACIAL 30X3	2.300 A																																																																																																																																					
7702985300986	LIMPION ESTAMPA	8240 D																																																																																																																																					
7703824171392	TOALLA SECANTE	2900 D																																																																																																																																					
7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D																																																																																																																																					
SUBTOTAL		19040																																																																																																																																					
7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D																																																																																																																																					
7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D																																																																																																																																					
7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D																																																																																																																																					
7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D																																																																																																																																					
7702985407548	TOALLA MANOS 41	7900 D																																																																																																																																					
7702985407708	TOALLA MANOS 41	8900 D																																																																																																																																					
7702985407708	TOALLA MANOS 41	8900 D																																																																																																																																					
SUBTOTAL		76340																																																																																																																																					
Descripcion	Cant.	Vr.Und.	Vr.Total																																																																																																																																				
3000166	UND																																																																																																																																						
BALASTO ELECTRONICO 2X96 T12 120V *	1	21.552	21.552																																																																																																																																				
3170106	UND																																																																																																																																						
TUBO 96" T12 5000K MAXI "REPOSICION"	2	7.586	15.172																																																																																																																																				
3600017	JGO																																																																																																																																						
SOCKET SLIM LINE ECON. - MED	2	862	1.724																																																																																																																																				
3710041	UND																																																																																																																																						
MUEBLE COMERCIAL 2X96 - ELECTROCON	1	16.379	16.379																																																																																																																																				
Subtotal			54.827																																																																																																																																				

Quizás algunos estudiantes inicien la actividad haciendo uso de la técnica de truncamiento, en la cual se toma uno o los dos dígitos de la izquierda más significativos según la situación, de tal manera que le permita operar más fácilmente con el número resultante y al final añadir los ceros necesarios. Por ejemplo, para la **FACTURA 1**, algunos estudiantes pueden expresar: “Tome tres y dos que son cinco y uno, porque lo aproximo a mil, serían seis; y tres, nueve y uno,

diez más uno, porque quinientos más quinientos da mil, once; y más uno doce y cuatro dieciséis, por lo tanto el valor total de esta factura sería un poco más de dieciséis mil pesos”. Pase por cada uno de los grupos recolectando la información necesaria que le permita enriquecer esta actividad. Finalizado el trabajo en grupo, invite a los estudiantes que consideran tiene un procedimiento rápido y contundente para determinar el valor de la factura.

### Actividad2

**En qué consiste:** Se presentaran diferentes situaciones problema en las cuales se debe recurrir al proceso de estimación para poder dar una solución a las mismas.

#### Materiales:

- Recipientes plásticos de diferentes tamaños.
- Agua.
- Una caneca.

#### Desarrollo propuesto:

Plantee a los estudiantes la siguiente situación:

*Se ha preparado cierta cantidad de jugo que se vierte en un recipiente que por su peso no se puede mover. El jugo será distribuido a los participantes de una reunión. Sin embargo no se sabe para cuántas personas alcanzan, es por esto que los estudiantes de este grupo deberán determinar el número de personas aproximado para los que alcanza el jugo.*



Permita que los estudiantes organizados en grupos planteen alternativas de solución y den un dato aproximado de la cantidad de personas para las que alcanzaría el jugo. Posteriormente, invítelos a compartir sus producciones, acompañando la reflexión con la siguiente pregunta: *¿Cómo medir la cantidad de líquido que tiene un recipiente si no se puede mover?* Es posible que algunas respuestas indiquen que con otro recipiente más pequeño (vaso) y lo que tendría que hacerse es sacar uno a uno la cantidad de vasos. *¿Este vaso tiene que ser*

*diferente o igual?* Quizás las respuestas de algunos estudiantes se inclinen porque los vasos sean iguales, pues a cada persona se le dará la misma cantidad de jugo; a otros no les importará el que los vasos sean distintos. Otras preguntas podría ser: *¿Por qué se puede afirmar que el jugo alcanza para un determinado número de personas?* Establecida la posición de los estudiantes permita que éstos realicen la experiencia, pero antes, invítelos a reflexionar sobre como distribuirán los materiales para realizar la actividad.

Este pendiente de las acciones que realizan los estudiantes pues las mismas le permitirán enriquecer el momento de discusión. Algunos estudiantes tomarán el recipiente más grande y sacaran agua de la caneca, tomando dos medidas cada vez que introducen el recipiente para sacar agua; una que es la altura inicial de agua en la caneca y altura final cuando se ha sacado el recipiente con agua. Posteriormente utilizarán esa diferencia para hacer una estimación de la cantidad de agua que hay en la caneca. Además determinarán la cantidad de vasos que se pueden llenar con el recipiente que se utilizó, para así calcular el número de personas que podrían tomar jugo. Paralelo al desarrollo de la actividad, indague qué sucedería si se cambia el recipiente con que se saca agua de la caneca por otro más pequeño o más grande y pregunte ¿qué sucede con la información del número de recipientes, aumenta, sigue igual o disminuye? Además se recomienda al docente registrar las distintas unidades que tomaron



los estudiantes para medir, las acciones que siguieron y la elección de un recipiente para determinar un patrón de medida que permite cuantificar las veces que se requiere para establecer el dato del número de personas para las que alcanza el jugo.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes estimen el valor que pueden costar los ingredientes para preparar una ensalada de frutas.

#### Materiales:

- Frutas de la región o imágenes como se muestra a continuación (asignar un precio a cada una de ellas).

 <p>Uva red globe nacional \$4.760/Kg</p>	 <p>FRESA 250G \$3.760</p>	 <p>MANGO TOMMY \$2.280/Kg</p>	 <p>MANZANA ROJA GRANEL \$5.850/Kg</p>	 <p>COCO \$3.240/Kg</p>
 <p>PAPAYA COMÚN \$1.290/Kg</p>	 <p>PLÁTANO MADURO \$1.940/Kg</p>	 <p>MELÓN CANTALOUP \$1.840/Kg</p>	 <p>DURAZNO NECTARIN \$6.170/Kg</p>	 <p>1 LITRO CREM HELADO TRADICIONAL RON PASAS \$13.490</p>

### Desarrollo propuesto:

Plantee a los estudiantes la siguiente situación:

*Necesitamos preparar una ensalada de frutas en la que se requiere un kilogramo de cada una de ellas. Nos han dado cierta cantidad de dinero y un listado de las frutas que puede llevar la ensalada. (Presente a los estudiantes, ya sea en físico o a través de imágenes, las frutas que puede llevar la ensalada. Es importante garantizar que los precios de las mismas sean visibles, por ende tenga en cuenta la imagen que acompaña la descripción de los materiales). Se debe determinar la mayor cantidad de frutas que se pueden adquirir con el dinero asignado.*

Ahora indíqueles que se cuenta con determinada cantidad de dinero, por ejemplo \$20 000. Invítenlos a que determinen qué frutas se pueden comprar con el dinero asignado. Además recuérdelos que los cálculos deben hacerse de manera mental. Este atento a los razonamientos que realizan los estudiantes. Consienta que algunos de ellos los compartan con la totalidad del grupo. Entre las conclusiones de los estudiantes es factible escuchar que: *"Debo tomar los precios más bajos para garantizar que tendré varias frutas, pues si tomo precios altos no podré comprar muchas frutas, entonces si aproximo algunos valores para realizar la suma*

*con mayor facilidad tendría que el plátano maduro cuesta aproximadamente dos mil pesos, entonces me quedarían dieciocho mil; entre la papaya y el melón gastaría tres mil pesos, aproximadamente, por lo tanto me quedarían quince mil; entre el coco y la uva gasto alrededor de ocho mil pesos, por lo tanto me quedaría siete mil pesos, con lo que puedo comprar un kilo de durazno y me sobra un poquito de dinero aunque ya no me alcanzaría para comprar otra fruta".* Aproveche cada una de las intervenciones para recordar la importancia del proceso de estimación en algunas situaciones cotidianas, además de las técnicas de truncamiento o de redondeo.

## Instrumento para las evaluaciones del aprendizaje

La estimación produce resultados aproximados porque en este proceso se transforman o sustituyen los datos por números sencillos que son fáciles de memorizar y asequibles para las operaciones aritméticas mentales. Igualmente, se emplea un tipo de registro –números decimales- el cual genera ciertas propiedades y maneras de operar con ellos,

especialmente en su aplicabilidad para situaciones que requieren aproximar o medir con cierto grado de precisión. En la siguiente tabla se presentan algunas descripciones que permiten valorar algunos de los procesos matemáticos que se evidenciaron en la secuencia. Ésta puede ser utilizada por el docente.

SUBPROCESOS PROCESO	MEDIR ES ESTIMAR	ERROR AL ESTIMAR	MODELO PARA ESTIMAR
Estimación	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Compara la medida de algunos objetos para determinar la de otros.</li> <li><input type="checkbox"/> Utiliza una unidad de medida para determinar la medida de un objeto.</li> <li><input type="checkbox"/> Realiza estimaciones de medidas teniendo presente la magnitud Longitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica que las cantidades que se obtienen de la medida y su valor, en un proceso de medición, son forzosamente aproximadas.</li> <li><input type="checkbox"/> Determina que todo instrumento de medida tiene cierto grado de imprecisión.</li> <li><input type="checkbox"/> Aplica reglas en el proceso de estimación como el truncamiento o el redondeo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Identifica que todo acto de estimación tiene un error.</li> <li><input type="checkbox"/> Toma decisiones sobre qué cantidades pueden ser despreciadas.</li> <li><input type="checkbox"/> Utiliza el cálculo mental para realizar estimaciones.</li> <li><input type="checkbox"/> Utiliza el lápiz y el papel para realizar estimaciones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Establece algunos modelos cuando realiza estimaciones.</li> <li><input type="checkbox"/> Aplica la información que tiene del fenómeno al realizar la estimación respectiva.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.</li> </ul>



¿Cómo describir  
variaciones con el  
llenado de tanques de  
almacenamiento?

# ¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?

## Visión general

El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado séptimo describan y representen situaciones de variación proporcional directa e inversa. La situación problema que orienta la secuencia es: Una empresa de tanques de almacenamiento de agua quiere analizar cómo se modifica la altura del llenado cuando cambia la forma del tanque, para reducir la utilización de recursos. En sus estudios, la empresa ha realizado experimentos y recolectado datos pero no ha podido comprender qué información le brinda la modificación del llenado de los tanques.

Es por esto que esta secuencia propone acciones para resolver la pregunta: **¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?** Además, esta secuencia promueve el desarrollo del pensamiento matemático y de habilidades comunicativas para experimentar, recoger información en tablas o en gráficas, realizar suposiciones para verificar y adecuarlas, construir preguntas o formular problemas. Constantemente se dan espacios para que los estudiantes comuniquen a otros sus comprensiones con relación a lo que se da en cada una de las actividades asociadas a la comprensión de la variación proporcional.

La secuencia didáctica, en la semana 1, aborda la comprensión de la situación problema y la experiencia modelada con recipientes sobre el llenado. En la semana 2, se controlan las variables del experimento como varios recipientes de diferentes diámetros pero con forma cilíndrica, y el tamaño de los vasos pequeños (tapi-tas o jeringas). Paralelamente se analizan los datos que presentan las tablas, como las gráficas que se obtienen. Los estudiantes concluyen algunas propiedades de la proporcionalidad directa. En la semana 3, se cambia la forma de los recipientes para determinar variaciones que no son proporcionales, a pesar de cumplir con la característica de que ambas variables se incrementan. En la semana 4 se indaga sobre algunas propiedades de las proporciones y se resuelven situaciones problemas. En las semanas 5 y 6 se abordan situaciones problema para que los estudiantes identifiquen las características de la variación proporcional inversa y sus representaciones tabulares y gráficos.

Finalmente como proceso de cierre de la secuencia, en la semana 7 se retoma la situación problema que orientó la secuencia y con lo que se desarrolló en las anteriores semanas para dar la respuesta y en la semana 8 se establecen otras conexiones con otras situaciones. Se espera que el docente determine los aprendizajes de los estudiantes con relación a la variación proporcional directa e inversa y puede utilizar el INSTRUMENTO PARA LAS EVALUACIONES DEL APRENDIZAJE que permite evaluar algunas de las características de la variación proporcional directa e inversa que se observan a través de las representaciones de tablas y gráfica; para ello se recomienda observarlo antes de desarrollar la secuencia. Así mismo, a lo largo de cada una de las actividades de aprendizaje, se sugieren momentos de evaluación cuando se invita tanto al docente como a los

---

estudiantes a reflexionar sobre lo construido, haciéndose explícitas al inicio, en la parte intermedia y al final de la secuencia. Además, se recuerda que la evaluación debe ser continua y permanente al largo del proceso educativo, en el que a la vez que se enseña, se evalúa y se aprende, pues todo acto de evaluación implica un aprendizaje.

Los desempeños esperados de un estudiante para esta secuencia didáctica son:

- Caracterizo la variación proporcional directa e inversa.
- Formulo y justifico procedimientos para resolver situaciones de proporcionalidad.
- Interpreto diferentes representaciones que se asocian a la variación proporcional.
- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa.
- Resuelvo problemas de variación proporcional en diversos contextos.

## ¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?

SEMANA	PREGUNTAS GUÍA	IDEAS CLAVE
1	¿Cómo varía la altura del llenado en tanques de forma cilíndrica?	<ul style="list-style-type: none"> <li>En las situaciones de variación proporcional directa, una variable depende directamente de la otra.</li> <li>Las variaciones de cada una de las variables se incrementan (o disminuyen) de igual forma.</li> </ul>
2	¿Cómo representar variaciones de la altura del llenado en tanques de forma cilíndrica?	<ul style="list-style-type: none"> <li>La proporcionalidad directa se modela con una gráfica lineal que pasa por el punto origen.</li> <li>La proporcionalidad directa establece incrementos iguales tanto en una como en la otra variable.</li> <li>La proporcionalidad directa establece relaciones aditivas como multiplicativas entre los valores de cada una de las variables para determinar un factor escalar entre cada uno de los valores.</li> <li>La proporcionalidad directa permite inferir datos a través de la interpolación y extrapolación.</li> </ul>
3	¿Cómo representar variaciones de la altura del llenado en tanques de forma no cilíndrica?	<ul style="list-style-type: none"> <li>Algunos incrementos son iguales para una variable, pero no siempre son iguales para la otra variable.</li> <li>La condición de que ambas variables aumenten (o disminuyen) es una condición de la proporcionalidad directa pero no es suficiente para determinarla.</li> </ul>
4	¿Cómo se relacionan los datos del llenado de los tanques?	<ul style="list-style-type: none"> <li>La constante de proporcionalidad como cociente entre los datos es un valor único.</li> <li>La proporcionalidad directa permite inferir datos a través de la interpolación y extrapolación.</li> <li>Las relaciones que existen entre la constante de proporcionalidad, la razón y proporción.</li> </ul>
5	¿Cómo las llaves inciden con el llenado de los tanques?	<ul style="list-style-type: none"> <li>En las situaciones de variación proporcional inversa, una variable depende inversamente de la otra.</li> <li>En la variación proporcional inversa, una variable aumenta y la otra disminuye.</li> <li>Si una variable se duplica o triplica, en la otra variable se reduce a la mitad o a un tercio respectivamente.</li> <li>El gráfico que representa una variación proporcional inversa es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes.</li> </ul>
6	¿Cómo varían otros aspectos de los tanques de almacenamiento?	<ul style="list-style-type: none"> <li>La constante de proporcionalidad inversa, como producto de los datos, es un valor único.</li> <li>La proporcionalidad inversa permite inferir datos a través de la interpolación y extrapolación.</li> <li>La condición de que en las variables, una aumenta y la otra disminuye, es una condición de la proporcionalidad inversa pero no es suficiente para determinarla.</li> </ul>
7	¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?	<ul style="list-style-type: none"> <li>Características de la variación de la proporcionalidad directa e inversa.</li> <li>Representaciones tabulares y gráficas correspondientes a la variación proporcional.</li> <li>Procesos de interpolación y extrapolación en la variación proporcional.</li> </ul>
8	Cierre y Evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicación de la proporcionalidad directa e inversa.</li> </ul>

### DESEMPEÑOS ESPERADOS

- Enuncio verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en el experimento.
- Ejecuto un experimento según las indicaciones dadas.
- Manejo instrumentos arbitrarios de medida.

- Establezco la relación entre tablas y gráficas.
- Caracterizo la proporcionalidad directa.
- Encuentro las regularidades entre los datos del experimento.
- Explico algunas relaciones matemáticas que muestran los datos del experimento.

- Diferencio representaciones de los llenados según la forma de los recipientes.
- Identifico las características de la proporcionalidad directa.
- Argumento las diferencias entre los llenados de recipientes cilíndricos y los no cilíndricos.

- Determino la constante de proporcionalidad.
- Ejercito algunos procedimientos estandarizados.
- Explico algunas estrategias para solucionar problemas.

- Caracterizo la proporcionalidad inversa.
- Explico las características de la proporcionalidad inversa.
- Utilizo las tablas y gráficas para resolver problemas.

- Determino la constante de proporcionalidad inversa.
- Ejercito algunos procedimientos estandarizados.
- Explico algunas estrategias para solucionar problemas.

- Caracterizo la variación proporcional directa e inversa.
- Formulo y justifico procedimientos para resolver situaciones de proporcionalidad.
- Interpreto diferentes representaciones que se asocian a la variación proporcional.
- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa.
- Resuelvo problemas de variación proporcional en diversos contextos.

- Empleo las características de los tipos de proporcionalidad.
- Resuelvo problemas de proporcionalidad.

### ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- Actividades de comprensión de la situación problema para determinar la pregunta y las formas de modelar la situación.
- Actividades experimentales de llenado de una botella o un recipiente con un vaso pequeño o una jeringa. Aquí se determinan las medidas de la altura y se diligencia una tabla.
- Existen diversas preguntas que orientan la reflexión y la discusión del grupo de estudiantes para que reconozcan sus posiciones.

- Actividades experimentales de llenado variando el tamaño de los vasos pequeños (tapitas o jeringas) y el diámetro de los recipientes cilíndricos que se llenan.
- Elaboraciones de tablas y gráficas sobre cada una de las experiencias.
- Las discusiones giran en torno a definir la relación entre los datos y definir la continuidad, donde se evidencian procesos de deducción de otros datos a partir de la información que se tiene y se establecen algunas características de la proporcionalidad.

- Actividades experimentales de llenado en recipientes no cilíndricos
- Elaboraciones de tablas y gráficas sobre cada una de las experiencias.
- Comprobaciones de las gráficas de la variación del llenado de estos recipientes.
- Las discusiones giran en torno a la necesidad de hallar otras características diferentes a “si los datos de una variable aumentan, en la otra también aumentan” para definir una situación de variaciones proporcional directa.

- Actividades de resolución de problemas para determinar la constante de proporcionalidad en algunas propiedades de las proporciones.
- Las discusiones se relacionan con algunas estrategias o procedimientos.

- Se plantea la situación problema sobre el llenado con llaves para deducir las características de la proporcionalidad inversa.
- Se ofrecen varias situaciones problema para que los estudiantes identifiquen las diferentes variaciones de proporcionalidad.
- Las discusiones con los estudiantes se relacionan con las características de la proporcionalidad inversa y sus representaciones tabulares y gráficas.

- Comprende la actividad experimental de retirar agua de un recipiente y analizar la gráfica que se produce.
- Se dan situaciones problema para encontrar el valor desconocido, que conllevan a elaborar tablas y gráficas.
- Discusiones sobre la constante de proporcionalidad inversa.

- Actividades para que los estudiantes reflexionen sobre las características de la proporcionalidad directa e indirecta y sus implicaciones a nivel de registro y determinación de procedimiento para hallar datos. Tal situación permite el reconocimiento del proceso que se llevó para llegar a una posible respuesta a la pregunta guía de la secuencia. Clasificación y formulación de situaciones similares.

- El proceso de evaluación es a través de preguntas abiertas relacionadas con la resolución de problemas.

# ¿Cómo varía la altura del llenado en tanques de forma cilíndrica?

Inicie la secuencia didáctica explorando los saberes previos de los estudiantes para determinar qué saben y qué no saben con respecto a la temática a trabajar. Esta exploración corresponde a una evaluación diagnóstica que le permite a usted identificar el lugar de donde puede partir para la construcción de conocimiento. Puede realizarla por medio de actividades orales, escritas y juegos, entre otros. Además, la evaluación diagnóstica le permite establecer un punto inicial, adecuar las actividades a los estudiantes y evidenciar el desarrollo de competencias durante la secuencia didáctica.

## IDEAS CLAVE:

- Las situaciones de variación proporcional directa, donde una variable depende directamente de la otra.
- Las variaciones de cada una de las variables se incrementan (o disminuyen) de igual forma.



## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Enuncio verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en el experimento.
- Ejecuto un experimento según las indicaciones dadas.
- Manejo instrumentos arbitrarios de medida.

## Primera sesión

*Cuando la relación entre dos variables o magnitudes es de proporcionalidad directa, se verifican las siguientes propiedades:*

- 1). Existe una dependencia de una con respecto a la otra, de tal manera que cuando cambia una de ellas la otra también cambia; es decir, si los valores aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).*
- 2). Si se comparan los valores de una variable para definir variaciones iguales, simultáneamente se producen variaciones iguales en la otra variable.*
- 3). Cuando se establecen razones entre los valores de una variable con respecto a la otra, su cociente determina el mismo número que se llama constante de proporcionalidad.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes comprendan el problema que orienta la secuencia.

Secuencia didáctica: *¿cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?*

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación problema.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan grupos de 5 estudiantes. El docente entrega la situación problema:



Una empresa de tanques de almacenamiento de agua quiere analizar cómo se modifica la altura del llenado cuando cambia la forma del tanque para reducir la utilización de recursos. En sus estudios, la empresa ha realizado experimentos y recolectado datos pero no ha podido comprender cómo la información obtenida explica la modificación del llenado de los tanques.

Cada uno de los grupos debe leer el problema y determinar cuáles serían las preguntas que se tendrían que contestar según la situación descrita. Cada uno de los grupos expone sus preguntas y se seleccionan las que analizan con mayor coherencia la altura del llenado de los tanques y la de interpretar información. Ahora invite a los estudiantes

que realicen una lista de la información que requieren para poder solucionar las preguntas que se escogieron anteriormente. De nuevo, se expone la lista y seleccione aquellas respuestas que se relacionen con las formas geométricas de los tanques, formas de medir la altura y los registros que se pueden llevar a partir de la información obtenida. Concluya que las acciones que orientan las actividades de las clases de matemáticas se relacionan con la pregunta: **¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?**

Ahora, indíqueles que para poder analizar la información del llenado de tanque se van a realizar experimentos del llenado en recipientes plásticos o vasos para simular lo que sucede en el tanque. Luego pregunte: *¿Es posible hacer de esta manera el estudio?* Permita que los estudiantes argumenten si esta simulación con recipientes puede dar solución al problema planteado. Es posible que algunos digan que no, por tanto, es importante que usted indique lo importante de trabajar con modelos a escala para realizar las adecuaciones necesarias y luego, sí invertir tiempo y recursos en los tamaños reales; de hecho, tome ejemplos, a nivel de ingeniería como construcción de puentes, viviendas y edificaciones, modelos de celulares, entre otros, donde inicialmente se hacen maquetas, modelos o planos que definirán posteriormente la construcción de las reales.

*Un modelo es un artefacto que se construye con el fin de realizar transformaciones o experimentos cuya manipulación apoya las conjeturas y razonamientos para estudiar situaciones u objetos reales.*

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes planeen y ejecuten un experimento de llenado en un recipiente de forma cilíndrica.

## Materiales:

- 2 botellas de plástico transparente o 2 recipientes de plástico de diferente diámetro y forma cilíndrica.
- 1 vaso pequeño de capacidad de 2 onzas o graduado.
- 1 jeringa de 10 ml con medidas y sin aguja.
- 1 cinta de enmascarar.
- 1 tijeras.
- 1 lápiz y papel.
- 1 litro de agua.
- 1 jarra para vaciar el líquido.
- 1 regla graduada.



En caso de no tener botellas de plástico transparente, se sugiere que utilice vasos de vidrio que tengan forma cilíndrica y su llenado se realice con tapas de gaseosa. Solicite el material a los estudiantes.

## Desarrollo Propuesto:

Cada uno de los grupos prepara el material: En la botella o en el vaso pegan una cinta de enmascarar que quede y que tome la parte cilíndrica de la botella o del vaso porque algunos envases no son totalmente cilíndricos; en caso, de que el recipiente no sea cilíndrico totalmente, puede llenar de agua hasta que se encuentre la base cilíndrica y

desde ahí colocar la cinta, así se establece el nivel cero del recipiente. Ahora, coménteles que cada uno va a verter vasos pequeños (tapitas o jeringas) de agua al recipiente, siempre de la misma cantidad de agua, y va marcando en la cinta el nivel del agua cuando ésta se estabilice, y que contesten por escrito: *¿Cómo varía la altura del llenado en el recipiente?* Ellos pueden contestar que depende de la forma del vaso, ya que si es gordo es menos altura y se llena lento; si es flaco, se llena rápido y hay más altura. Recolecte evidencias de las conclusiones de los grupos sobre el llenado y menciónelos que esa sería la suposición que se verificaría con la experiencia.

Ahora, indíqueles que continúen el experimento hasta completar 15 vasos pequeños (o 15 jeringas o 15 tapas) vertidos en el recipiente y que procuren que cada vaso (jeringa o tapa) tenga la misma medida de agua. Luego que retiren la cinta (en caso, en que se muestre que las distancias marcadas no son aproximadamente las mismas, exíjales a los estudiantes que vuelvan hacer el experimento). Cuando esté bien, solicíteles que coloquen la cinta sobre una regla del tal forma que el cero coincida con el cero de la regla y que determinen las alturas de cada una de las veces en que se llenó agua con estas medidas, completando la siguiente tabla:



Número de tapas (vasos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Altura (mm)															

Paralelamente, observe que los estudiantes diligencien bien la tabla, puesto que pueden aparecer ciertos errores: Algunos cometen el error de colocar en cada casilla lo que se incrementó escribiendo el mismo número en todas las casillas; otros no miden desde el cero en la regla sino par-

ten desde 1 cm; algunos no tienen en cuenta los milímetros y solo toman la unidad de centímetros, por lo tanto es preciso exigirles que cuenten en milímetros como indica la tabla. Es importante que exista la correspondencia entre el número de vasos y la medida de la altura del vaso.

# ¿Cómo representar variaciones de la altura del llenado en tanques de forma cilíndrica?

## IDEAS CLAVE:

- La proporcionalidad directa se modela con una gráfica lineal que pasa por el punto origen.
- La proporcionalidad directa establece incrementos iguales en una como en la otra variable.
- La proporcionalidad directa establece relaciones aditivas como multiplicativas entre los valores de cada una de las variables para determinar un factor escalar entre cada uno de los valores.
- La proporcionalidad directa permite inferir datos a través de la interpolación y extrapolación.

## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Establezco relación entre tablas y gráficas.
- Caracterizo la proporcionalidad directa.
- Encuentro las regularidades entre los datos del experimento. Explico algunas relaciones matemáticas que muestran los datos del experimento.

## Primera sesión

*Las características de la variación proporcional directa en las tablas muestran con más claridad las siguientes propiedades:*

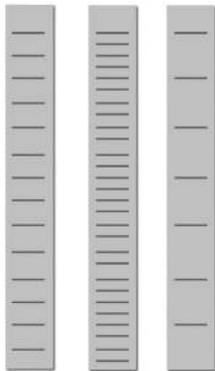
*1). Si los valores de una variable se duplican entonces los valores de la otra variable también se duplican, estableciéndose el factor escalar. 2). El valor de la suma de los valores de una variable ( $x_1 + x_2$ ) es igual a la suma de cada uno  $x_1$  y  $x_2$  de forma independiente, y paralelamente, sucede lo mismo con los valores correspondientes de la otra variable.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes interpreten las marcas de las cintas de enmascarar que se obtuvieron de la experiencia.

#### Materiales:

- Las tablas diligenciadas de la experiencia.
- Cintas de enmascarar con las marcas.
- 1 botella de plástico transparente o un recipiente de plástico de forma cilíndrica.
- 3 vasos pequeños de diferente tamaño, 1 jeringa sin aguja o tapa.
- 1 rollo de cinta de enmascarar.
- 1 tijeras.
- Lápiz y papel.
- 1 litro de agua.
- 1 jarra para vaciar el líquido.
- 1 regla graduada.



En caso de no tener botellas de plástico transparente, se sugiere que utilice vasos de vidrio que tengan forma cilíndrica y su llenado se realice con tapas de gaseosa. Solicite el material a los estudiantes.

### Desarrollo Propuesto:

Organice los mismos grupos de la semana pasada. El docente realiza un recuento del experimento de la semana anterior. Solicite a cada uno de los grupos que tengan su cinta y les pregunta: *¿Qué significan las marcas que se determinaron en la cinta?* Espere que los estudiantes mencionen argumentos relacionados con el nivel de la altura alcanzada puesto que cada vez que se vierte un vaso (o tapa o jeringa), permanece la misma proporción de llenado en cada tanda porque se vierte la misma cantidad de agua. El docente pega en el tablero todas las cintas de enmascarar con las marcas y les permite a los estudiantes que las observen. Ahora pregúnteles: *¿Las marcas generadas en las cintas fueron distintas, por qué?* Lo señalado por los estudiantes debe estar relacionado con el diámetro del recipiente que se llena y con el tamaño del vaso (tapita o jeringa) que se utiliza para verter el agua. *¿Es posible determinar cuál es el recipiente que se llenó más rápido sólo observando las cintas de enmascarar?* Algunos dirán que no, ya que involucran en sus argumentos las dos variables que son el tamaño del recipiente y el tamaño del vaso utilizado para verter agua, por lo tanto, oriente la discusión planteando llenar el mismo recipiente con diferentes vasos pequeños (tapitas o jeringas). Exíjales que escriban la respuesta de, *¿Cuál tamaño de vaso (tapitas o jeringas) utilizado para verter agua permite el llenado más rápido del recipiente?* Lo que pueden mencionar es que el vaso más grande llena más rápido. *¿Cómo reconocer que esta afirmación es cierta?* Las respuestas están dadas en los datos de la experiencia. Invite a los estudiantes a comprobar dicha información realizando el experimento del llenado con los tres vasos de diferente tamaño. Llenen las tablas correspondientes y que verifiquen sus suposiciones.

*Los estudiantes en sus enunciados muestran cómo se relaciona una variable con respecto a la otra de forma cultiva. Al analizar cada uno de los casos con los datos de las variables, en la representación tabular, se inicia el proceso de determinar la relación de forma cuantitativa para establecer la constante de proporcionalidad.*

Cada uno de los grupos, va a analizar los datos de cada una de las tablas a través de las siguientes preguntas: *¿Qué ocurrió con la altura al agregar el tercer vaso al recipiente?, ¿en cuánto varió la altura del recipiente?, ¿qué sucede con la altura en el recipiente, al verter el cuarto vaso?* Las respuestas deben referirse a que al aumentar el número de vasos aumenta la altura; y de un caso a otro, la altura se hace mayor por el tamaño del recipiente. Explique que se están manejando dos tipos de variables; una que es el número de vasos y otra es la altura en el recipiente. Posteriormente, pregúnteles, *¿cuál de esas variables depende una de la otra?* Ahora escriba en el tablero una de las tablas de un grupo y permítales expresar la relación aditiva que existe entre los datos de cada variable, así como se muestra a continuación:

Número de vasos	1	2	3	4	5	6
Altura (mm)	12	24	36	48	60	72

$\overset{+1}{\curvearrowright}$   $\overset{+1}{\curvearrowright}$   $\overset{+1}{\curvearrowright}$   $\overset{+1}{\curvearrowright}$   $\overset{+1}{\curvearrowright}$   
 $\underset{+12}{\curvearrowleft}$   $\underset{+12}{\curvearrowleft}$   $\underset{+12}{\curvearrowleft}$   $\underset{+12}{\curvearrowleft}$   $\underset{+12}{\curvearrowleft}$

Realice la pregunta: *¿Si sumo los datos de 1 y 2 vasos vertidos, qué sucede con la altura en el recipiente?* Equivale a tres vasos vertidos cuya altura es 36 mm. Hágalos ver que la suma de dos valores de una magnitud le corresponde a la suma de los valores correspondientes de la otra magnitud. Ahora, cuestiónelos: *¿Cómo son esos sumandos que marcamos en la tabla?, ¿qué operación modela la suma de sumandos iguales?* Lo que les permite comprender el factor escalar, partiendo desde el valor del primer vaso vertido hacia los otros y de la primera altura hacia las otras, indicándolos de la siguiente forma:

Número de vasos	1	2	3	4
Altura (mm)	12	24	36	48

Es importante que los estudiantes registren la información de las preguntas anteriores. Para cerrar la sesión, invítelos a realizar la verificación de estos cálculos con las otras marcas de las cintas de enmascarar y que establezcan las relaciones matemáticas entre ellas. Escriban sus respuestas sobre la verificación de las suposiciones que se habían establecido antes de la experiencia y qué aprendió con respecto a la proporcionalidad teniendo en cuenta las modificaciones que se realizaron del experimento.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes grafiquen la información dada en las tablas.

#### Materiales:

- Las tablas diligenciadas de la experiencia.
- 2 botellas de plástico transparente o dos recipientes de plástico de forma cilíndrica de diferente tamaño.
- 3 vasos pequeños de diferente tamaño, 1 jeringa sin aguja o tapa.
- 1 rollo cinta de enmascarar.
- 1 tijeras.
- Lápiz y papel.
- 1 litro de agua.
- 1 jarra para vaciar el líquido.
- 1 regla graduada.

En caso de no tener botellas de plástico transparente, se sugiere que utilice vasos de vidrio que tengan la forma cilíndrica y su llenado se realice con tapas de gaseosa. Solicite el material a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Se mantienen los mismos grupos de estudiantes. Se les recuerda que en la anterior sesión se modificó el tamaño del vaso (tapa o jeringa) con el que se vierte el agua al recipiente y que se elaboraron tablas donde se realizó un análisis entre los datos. Ahora, se invita a los estudiantes a comprobar y contestar la pregunta: *¿Qué sucede si se cambia el tamaño de los recipientes que se llenan y se mantiene el mismo vaso pequeño (tapa o jeringa) que se vierte en él?, ¿se mantienen o cambian las suposiciones con respecto al nú-*

## SEMANA 2

mero de vasos y la altura? y ¿en las tablas de esta experiencia, se pueden establecer las mismas relaciones matemáticas? Las respuestas de los estudiantes deben estar dadas en que sucede lo mismo pues el llenado es rápido y más altura si el recipiente es delgado, y es lento y menos altura cuando el recipiente es ancho. Cuando los estudiantes usan la expresión de rápido o lento indican que están involucrando otra variable que es tiempo; por tanto, realice la observación que se ésta analizando la relación entre número de vasos y altura por cada vaso vertido en el recipiente. Recolecte evidencias y exíjales que escriban las respuestas para que a continuación llenen dos recipientes de diferente diámetro con el mismo vaso. Paralelamente, de nuevo, determinen las marcas, llenan las tablas y establecen las relaciones numéricas entre los datos de forma aditiva y de hallar el factor escalar. Recolecte evidencias de la forma en que los grupos realizan la experiencia, e invítelos a verter solo cuatro vasos. Luego pregúnteles: *¿Cuántos vasos necesitaría para verter y llenar el recipiente?* Algunos grupos darán una respuesta azarosa, otros calculan un valor aproximado repitiendo la marca que ya tienen, otros miden lo que falta con la regla y miden la altura de la marca de un vaso para determinar cuánto falta. Estas últimas dos respuestas indican que los estudiantes están comprendiendo la relación entre varia-

bles proporcionales. Indíqueles que verifiquen sus suposiciones identificando similitudes a las dadas en la sesión anterior.

Ahora, indíqueles que se van a realizar las gráficas cartesianas correspondientes a las tablas elaboradas. Explíqueles cómo se hacen estas gráficas. Para ello, en el eje horizontal colocamos el número de vasos vertidos que corresponde a la variable independiente, ya que ésta es la que se controla; y en el eje vertical colocamos la altura que alcanza el recipiente y corresponde a la variable dependiente ya que ésta se determina por la cantidad de agua que se vierte y la forma del recipiente (figura 1). Invite a los estudiantes a dibujar los ejes y que establezcan en el eje vertical particiones iguales cada una de 12 mm, y de forma similar, se hacen particiones iguales en el eje horizontal de 1 en 1 (figura 2). No son necesarias las mismas particiones y medidas que la del eje vertical. Para representar en la gráfica un dato de la tabla es preciso ubicar un punto específico que se obtiene de la intersección de dos segmentos, uno corresponde al dato del número de vasos y el otro que corresponde al dato de la altura (figura 3). Cada uno de los estudiantes debe continuar la representación de puntos de la tabla para obtener una gráfica con solo puntos y borrarnos los segmentos que ayudan en la ubicación (figura 4).

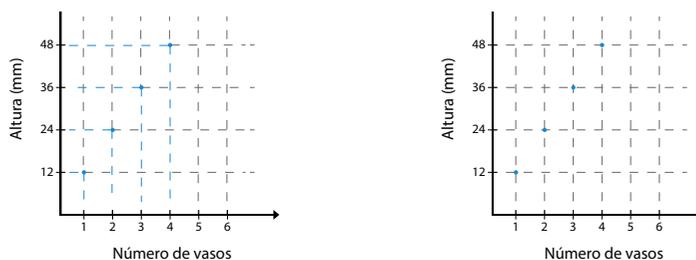
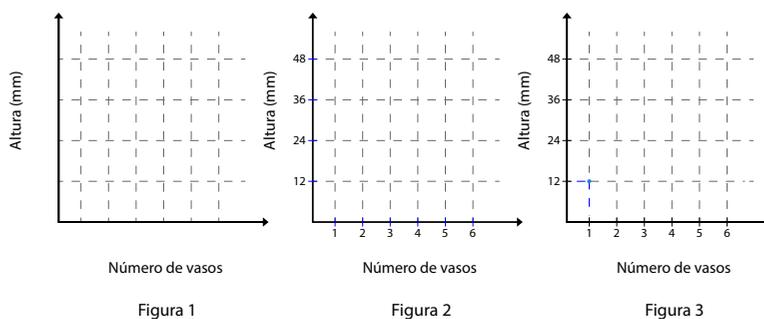
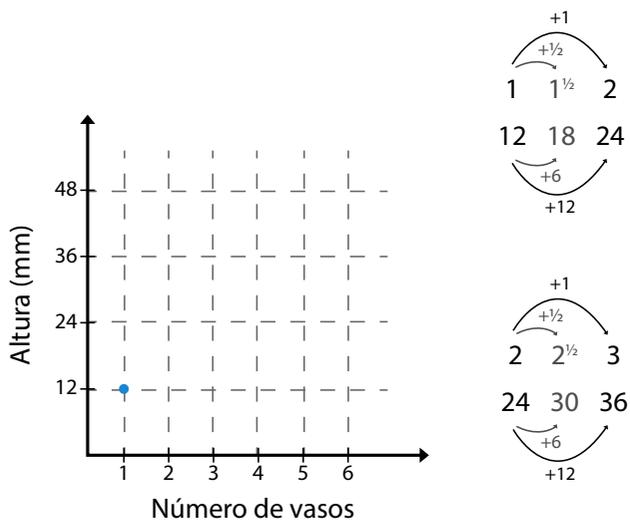


Figura 4

Invite a los estudiantes a contestar la pregunta: ¿Es posible unirlos? Justifiquen la respuesta. Realice una puesta en común y recolecte las evidencias al respecto. Ahora invítelos a contestar:

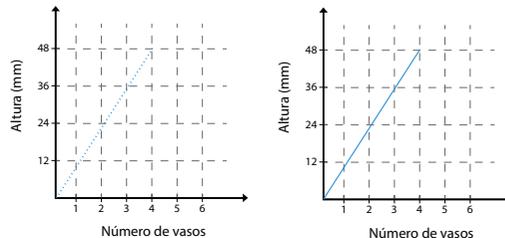
- ¿Es posible saber cuánto alcanza la altura si se vierte un vaso y medio?
- ¿Es posible saber cuánto alcanza la altura si se vierte dos vasos y medio?
- ¿Es posible saber cuánto alcanza la altura si el recipiente fuera muy grande y se vierten 30 vasos?

Permita que los grupos realicen los procedimientos y recolecte evidencias del uso de la información de la tabla y la gráfica. Luego, cada uno de los grupos muestra sus procedimientos, a su vez que se realizan las aclaraciones pertinentes a las dudas que puedan tener. Valide respuestas sobre la gráfica donde ellos ubiquen el número de vasos solicitado y determinen su altura, o en la tabla donde determinen cuál es el dato que está en la mitad, como se muestra a continuación:



De nuevo, pregunte: ¿Es posible unir los puntos de la recta? y ¿Por qué? Algunas respuestas están relacionadas con las preguntas del vaso y medio y muestran todos los medios; es necesario que usted ubique otros puntos para determinar la altura de otras cantidades y visualice puntos continuos al respecto. Ahora, muéstrelas llenar el vaso de forma continua y que observen que la cantidad de agua que se vierte es constante y define la altura en el recipiente, y

por lo tanto es necesario unir todos los puntos en la recta, cómo se muestra a continuación:



Ahora, la pregunta, ¿Por qué se realizó la experiencia con vasos y registramos los datos de éstos? Los estudiantes deben mostrar en sus respuestas que estos datos nos permitieron reconocer cómo se comporta el llenado y que la medida del vaso siempre es la misma permitiendo ver cuánto sube un recipiente del otro; y como son parecidos los incrementos, eso debe pasar con otros datos que no se dieron en los datos.

Para cerrar la semana, cuestiónelos sobre la pregunta de esta semana, donde las respuestas de los estudiantes se relacionan con ideas sobre: 1). Al aumentar la cantidad del agua en el recipiente, la altura del llenado también aumenta. 2) Como siempre se vierte la misma cantidad de agua, siempre se incrementa la altura de llenado en la misma proporción en el recipiente, por ejemplo, en el caso nuestro, si se aumenta un vaso, la altura es de 12 mm en el recipiente. 3). Al analizar los datos de las tablas, se observa que al duplicar, o al triplicar, etc., la cantidad de vasos que se vierten en el recipiente, la altura del agua en el recipiente también se duplica, triplica, etc. 4). La gráfica que representa la relación entre el número de vasos y la altura del líquido es una línea recta. Es necesario que declare que este tipo de fenómenos que cumplen incrementos iguales en ambas variables, pues si una aumenta y la otra también o viceversa y la gráfica es una línea recta, se reconoce como **variación proporcional directa**.

Es importante que los estudiantes registren la información, por tal razón invítelos a realizar las gráficas de las otras tablas. Escriban sus respuestas sobre la verificación de las suposiciones que se habían establecido antes de la experiencia y qué aprendió con respecto a la proporcionalidad con las modificaciones que se realizaron del experimento.

# ¿Cómo representar variaciones de la altura del llenado en tanques de forma no cilíndrica?

## ! IDEAS CLAVE:

- Algunos incrementos son iguales para una variable, pero no siempre son iguales para la otra variable.
- La condición de que ambas variables aumenten (o disminuyan) es una condición de la proporcionalidad directa pero no es suficiente para determinarla.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Diferencio representaciones de los llenados según la forma de los recipientes.
- Identifico las características de la proporcionalidad directa.
- Argumento las diferencias entre los llenados de recipientes cilíndricos con los no cilíndricos.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes analicen si al aumentar ambas variables en un llenado de un recipiente no cilíndrico, este llenado no es de variación proporcional directa.

#### Materiales:

- 1 recipiente de forma semiesférica
- 1 vaso pequeño, 1 jeringa sin aguja o tapa.
- 1 rollo cinta de enmascarar.
- 1 tijeras.
- Lápiz y papel.
- 1 litro de agua.
- 1 jarra para vaciar el líquido.
- 1 regla graduada.
- Fotocopia de la situación.

Solicite el material a los estudiantes.

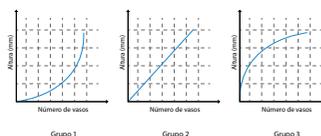
#### Desarrollo Propuesto:

A cada estudiante entréguele la siguiente situación:

El experimento del llenado se realiza en un recipiente de forma semiesférica y la medida del agua que se vierte es de un vaso pequeño:



Unos grupos de estudiantes han elaborado las siguientes gráficas como resultado del llenado.



¿Con cuál de estas gráficas estas de acuerdo? Justifica tu elección.

Organice 3 grupos de acuerdo a la elección de cada estudiante. En los diferentes grupos, cada uno de los estudiantes leen sus argumentos y mejoran sus razones para elaborar la posición del grupo al respecto de la anterior situación y sugiéralas que indiquen cómo son los incrementos de la altura cada vez que aumenta el número de vasos que se vierten en el recipiente. Indíqueles que esta suposición y elección es la que va a comprobar en la experimentación. De nuevo, cada uno grupos, coloca la cinta de enmascarar (de igual forma que las sesiones anteriores) para llevar las marcas cada vez que llena el recipiente con la misma cantidad de agua del vaso pequeño. Los estudiantes deben medir los incrementos de la altura, elaborar y registrar en la tabla, y hacer la gráfica correspondiente. Luego, cada uno de los grupos analiza su suposición frente a los resultados que obtuvieron con el llenado. Pregúntele, *¿Por qué coincidió o no la forma de la curva que aparece*

*en la gráfica construida?, ¿Qué no tuvieron en cuenta para su elección?* Organice una puesta en común donde se acuerde cuál es realmente la gráfica que se debe elegir. Valide las respuestas que se relacionan con la del grupo 3 porque el recipiente es semiesférico y tiene la parte superior más ancha que la de abajo, entonces la altura muestra incrementos mayores en la parte inferior que en la parte superior donde sus incrementos son menores, casi cero; este escenario genera una curva con la concavidad hacia abajo, cuyos datos se pueden verificar en la tabla construida por ellos. Ahora, pregúntele, *¿es posible que sólo se analice la proporcionalidad del llenado analizando que si una variable aumenta y la otra también aumenta?* Las respuestas deben estar relacionadas que se tiene que verificar y comprobar que los incrementos sean iguales y no distintos como ocurrió en este caso; por lo tanto, no es una variación proporcional directa.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes definan la gráfica que le corresponde a recipientes de forma no cilíndrica.

#### Materiales:

- Tres recipientes no esféricos de las siguientes formas:



- 1 vaso pequeño (1 tapita o 1 jeringa sin aguja).
- 1 rollo de cinta de enmascarar.
- 1 tijeras.
- Lápiz y papel.
- 1 litro de agua.
- 1 jarra para vaciar el líquido.
- 1 regla graduada.
- Fotocopia de la situación.

Solicite el material a los estudiantes. En caso que no encuentre recipientes de estas formas, las botellas tienen partes que las tienen, llene con agua hasta que tenga la forma que se requiere.

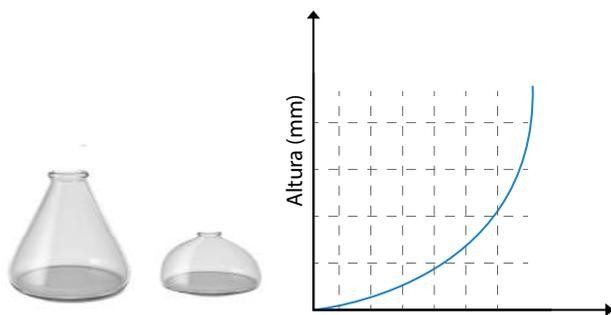
#### Desarrollo Propuesto:

Dígalos a los grupos que tienen que establecer la gráfica que le corresponde a cada uno de los recipientes antes de realizar el experimento. Luego, cada uno de los grupos expone sus gráficas de los tres recipientes, selecciona una gráfica para cada recipiente y se escriben las razones de su elección. Luego, asigne a cada uno de los grupos el llenado de un recipiente solamente, que elaboren la tabla y la gráfica correspondiente. Cada uno compara los resultados con la elección acordada por todos. En caso, que no coincida con la suposición deben escribir las razones que

## SEMANA 3

no se tuvieron en cuenta. Cada uno de los grupos expone sus hallazgos, y permita a los otros grupos indagar sobre la calidad de la experimentación, los datos y las conclusiones a las que llegó el grupo expositor. Valide representaciones de las gráficas que se parezcan a las que se dan a continuación:

1. En el caso de que el recipiente sea más ancho en la parte de arriba que en la parte de abajo, su gráfica se parece a la que se obtuvo en la actividad 1 de esta sesión.
2. En el caso de que el recipiente sea más ancho abajo que en la parte de arriba, su gráfica se parece a:



Ahora, vuelva a preguntar, *¿Es posible que sólo se analice la proporcionalidad del llenado observando que una variable aumenta y la otra también aumenta?* Las respuestas deben estar relacionadas que se tiene que verificar y comprobar que los incrementos sean iguales y no distintos entre las variables, como ocurrió en estos casos; por lo tanto, no es una variación proporcional directa.

*En la mayoría de los textos escolares sólo se establece “que los valores de ambas variables deben aumentar” para determinar una situación de proporcionalidad directa, lo cual genera que los estudiantes solo se fijen en esto y no en las otras características que son necesarias para su definición, como por ejemplo, los incrementos de cada una de las variables tienen que ser iguales entre sí para comprender la proporcionalidad directa en las diferentes situaciones.*

Para cerrar, es preciso que los estudiantes identifiquen cómo las actividades de la semana contribuyen a solucionar el problema que orienta la secuencia, e invítelos a contestar la pregunta de la semana.

# ¿Cómo se relacionan los datos del llenado de los tanques?

## ! IDEAS CLAVE:

- La constante de proporcionalidad como cociente entre los datos es un valor único.
- La proporcionalidad directa permite inferir datos a través de la interpolación y extrapolación.
- La relación entre la constante de proporcionalidad, la razón y la proporción.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Determino la constante de proporcionalidad.
- Ejercito algunos procedimientos estandarizados.
- Explico algunas estrategias para solucionar problemas.

## Primera sesión

*La constante de proporcionalidad es una constante que se obtiene del cociente de los valores de las variables que a la vez es una razón, puesto que siempre es el mismo valor generando varias proporciones. Los estudiantes inician sus encuentros con las proporciones cuando se enfrentan a problemas multiplicativos e identifican que existen dos magnitudes distintas, en términos de Vergnaud (1998), espacios de medidas; por ejemplo: Rosa sabe que una chocolatina vale \$5, ¿Cuánto le cobran si compra 8? Existen estudiantes que manifiestan que no entienden por qué al multiplicar el número de chocolatinas con el precio da como respuesta el precio total. A veces, no se expresa que existe una razón cuando se dice en el problema “una chocolatina vale \$5” ya que la visión que se maneja de la razón son las que se construyen de forma fraccionaria o son las que se construyen de la forma “3 es a 4”, “por cada 3 hay 4” o  $\frac{3}{4}$ ; no existe la de “1 es a 5”, y de ahí que los estudiantes no perciban que resolver el problema es buscar otra razón para determinar una proporción. Y en el caso de determinar el precio de varias chocolatinas simplemente es usar reiteradas veces la constante de proporcionalidad.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes establezcan el cociente entre los datos recogidos de los diversos experimentos con el llenado de recipientes.

#### Materiales:

- Tablas de datos elaboradas de los experimentos.
- Papel y lápiz.

#### Desarrollo Propuesto:

De forma individual y por escrito, cada uno de los estudiantes dan respuestas a las preguntas: *¿Es posible hallar una relación numérica entre los valores correspondientes del número de vasos y la altura que alcanza el llenado en el recipiente de forma cilíndrica? y ¿es posible determinar la altura*

## SEMANA 4

que alcanza un recipiente sin tener que hacer el experimento, qué datos serían suficientes? Luego, organícelos en grupos de 3 personas. Comparten sus respuestas y se selecciona la que mejor los convence. Recolecte evidencias de esta elección y analice si los argumentos que dan si están acordes con las características de la proporcionalidad. Ahora, solicíteles que seleccionen una de las tablas que se construyeron con el llenado de recipientes de forma cilíndrica y que establezcan una relación comparativa entre la altura y el número de vasos. Paralelamente, recolecte evidencias donde los estudiantes establecen el factor escalar; en ese caso, indíqueles que lo que se quiere es una relación entre el dato del número de vasos y la altura alcanzada de ese dato y que una de las formas es estableciendo una razón.

De esta forma se generan dos respuestas, la primera que es un cociente de la forma  $\frac{\text{número de vasos}}{\text{altura alcanzada}}$  y la otra que es  $\frac{\text{altura alcanzada}}{\text{número de vasos}}$ . Ahora, invítelos a identificar si ese cociente ocurre en todos los datos que registra la tabla y cuál es el correcto.

Ahora, cada uno de los grupos expone sus respuestas que tienden a validar que ambos cocientes son posibles, indíqueles que este cociente le permite hallar el valor del otro cociente con una operación. ¿Cuál operación y cómo lo harían?

Cuando un grupo mencione que lo tiene, exhórtelo a comunicárselo a los otros, mostrando que cada uno de los casos de la tabla ocurre, y sugiéralos que lo verifiquen con los datos de la siguiente tabla:

Número de vasos	1	2	3	4
Altura (mm)	12	24	36	48

**Posible forma de verificación de los estudiantes:**

El cocientes  $\frac{12 \text{ mm de altura}}{1 \text{ vaso}}$  y se lee "12mm es la altura alcanzada en cada vaso".

Con este valor se obtiene

1 vaso  $\times \frac{12 \text{ mm de altura}}{1 \text{ vaso}} = 12 \text{ mm de altura}$

2 vasos  $\times \frac{12 \text{ mm de altura}}{1 \text{ vaso}} = 24 \text{ mm de altura}$

3 vasos  $\times \frac{12 \text{ mm de altura}}{1 \text{ vaso}} = 36 \text{ mm de altura}$

Declare que cuando la razón o cociente es el mismo en todos los casos, este valor se conoce como constante de proporcionalidad.

*Las situaciones que son de proporcionalidad directa se pueden modelar de la siguiente forma algebraica:  $k \times x$  donde  $k$  es constante. En el caso del llenado de recipientes cilíndricos,  $k$  es la constante de proporcionalidad y  $x$  lo que corresponde al número de vasos, y el resultado de esa multiplicación es la altura alcanzada en el recipiente.*

Luego, cada uno de los grupos establece las diferentes constantes de proporcionalidad de las tablas construidas

en los experimentos de llenado de recipientes cilíndricos y exíjales que realicen algunas comprobaciones y cálculos del cociente simplificando o realizando la división correspondiente.

Ahora, pregúnteles: *¿Es posible hallar una constante de proporcionalidad entre los valores correspondientes del número de vasos y la altura que se alcanza en el recipiente de forma no cilíndrica?* Las respuestas de los estudiantes indican las dos posiciones. Cada uno realiza algunos cálculos al respecto para comprobar que los cocientes entre los datos no son iguales.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes determinen procedimientos para encontrar el valor desconocido de una proporción.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación.
- Lápiz y papel.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice los mismos grupos de la sesión anterior. Cada uno contesta la siguiente situación:

En un llenado de un recipiente cilíndrico, se registran los siguientes datos:

Número de vasos	2	4	6	8
Altura (cm)	3	6	9	12

- ¿Es una situación de variación proporcional directa?
- ¿Es posible establecer esta proporción  $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ ?

Permita que cada uno de los grupos exponga sus respuestas que confirman que la situación es una variación proporcional directa. Luego, pregunte, qué procedimientos o estrategias elaborarían si a la proporción dada le falta un dato para encontrar el valor desconocido y si no se tuviera la tabla como apoyo. Anótelas, así:

$\frac{?}{3} = \frac{6}{9}$	$\frac{2}{?} = \frac{6}{9}$	$\frac{2}{3} = \frac{?}{9}$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{?}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

De nuevo, cada uno de los grupos muestra sus estrategias, las explican y hacen aclaraciones de las preguntas que se les hagan. Es posible que los estudiantes generen procedimientos para determinar el factor escalar, el factor funcional o la regla de tres.

*Otras de las dificultades de la enseñanza de la proporcionalidad es reducirla al método de regla de tres para resolver*

*problemas. De forma inconsciente los estudiantes lo vienen empleando cuando hacen conversiones de medida. Por ejemplo, si usted le solicita a un niño pasar 5 metros a centímetros, se tiene que construir la razón "100 cm es 1 m" que se simboliza  $\frac{100}{1}$  y se reduce a multiplicar por 100. Así mismo, la regla de tres es un proceso de encontrar la razón para 1 en una variable con respecto a la otra, o como declara Lamon (1983) es un proceso de hallar la unidad o la tasa, que a la vez corresponde a la constante de proporcionalidad, que al multiplicar con el otro valor hace que ese producto sea el valor solicitado.*

Ahora, cada uno de los grupos contesta las siguientes preguntas y las justifican:

- ¿Con los valores de una proporción es posible organizar las siguientes equivalencias:  $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$  ?
- ¿Con los valores de una proporción es posible organizar las siguientes equivalencias:  $\frac{6+4}{4} = \frac{1+9}{8}$  ?
- ¿Con los valores de una proporción es posible organizar las siguientes equivalencias:  $\frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{6+12}{4+8}$  ?
- ¿Con los valores de una proporción es posible organizar las siguientes equivalencias:  $\frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{6 \times 12}{4 \times 8}$  ?

Cada uno de los grupos selecciona una tabla y comprueba algunas de las equivalencias que se mencionaron. Invite a los estudiantes a comprobar las equivalencias en varias tablas de las que se construyeron con el llenado de recipientes cilíndricos y oriéntelos con las siguientes preguntas: ¿Se cumplen esas propiedades en todos los casos? y ¿por qué? Valide respuestas relacionadas con la equivalencia de fraccionarios o con la idea de construcciones de cocientes iguales.

## Actividad 2

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes resuelvan problemas de proporcionalidad directa.

### Materiales:

- Fotocopia de las situaciones problema.
- Papel y lápiz.

### Desarrollo Propuesto:

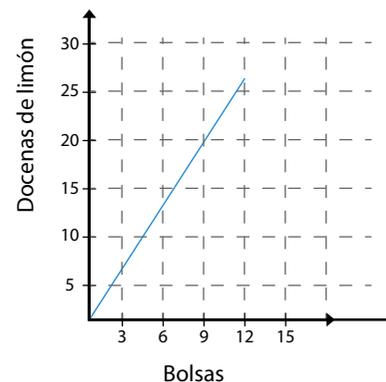
Organice parejas. Cada una resuelve las siguientes situaciones:

- Si se sabe que por 3 tapas que se echan al recipiente se fija una altura de 13 mm, ¿cuál es la altura que se puede determinar si se vierten 6 tapas de agua en el recipiente?
- Complete la razón: Si se sabe que 4 tapas equivalen a 17 mm, entonces ¿a cuántos milímetros de altura equivalen 3 tapas?
- Si se reconoce que por 7 tapas se obtiene una altura de 21 mm, ¿cuántas tapas se vierten si la altura es de 7 mm?

Recolecte evidencias de la forma como los estudiantes construyen la razón con los valores de la misma magnitud y los que la establecen con valores de diferentes magnitudes. Indíqueles que establezcan la constante de proporcionalidad de cada una de las situaciones. Invite a los estudiantes a compartir sus procedimientos a través del intercambio de cuadernos. Pregúnteles: *¿Cuál es el procedimiento nuevo que vieron?, ¿cuál procedimiento no entendieron? ¿Cuál es el procedimiento que más le gustó?, ¿cuál procedimiento muestra una razón entre los valores de la misma magnitud? y ¿cuál procedimiento determinó la constante de proporcionalidad para usarla como factor funcional?*

Luego, propóngales resolver las siguientes preguntas que se relaciona con la siguiente situación:

Un granjero elaboró la siguiente gráfica que muestra cuántos limones empacados le corresponden a cada bolsa.



¿Cuántos limones le corresponden a:

- 12 bolsas?
- 7 bolsas?
- 200 bolsas?

¿Es una situación de proporcionalidad directa?

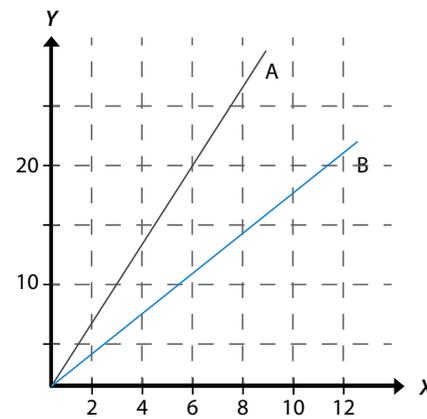
Elaboren la tabla que se requiere para construir la gráfica.

Luego, organice con todo el grupo, una discusión sobre: *¿Cómo es el uso que se le da a las proporciones para hallar el valor desconocido? Valide respuestas en torno a la*

relación que existe entre las razones y la constante de proporcionalidad puesto que realmente son lo mismo ya que la constante es para todos los casos entonces se organizan diferentes proporciones. *¿Cuál es la constante de proporcionalidad que le corresponde a la bolsa del ejercicio anterior?*

Para cerrar, permita que los estudiantes contesten la pregunta de la semana y cómo lo desarrollado le permite resolver el problema que orienta la secuencia. Coloque la siguiente situación para evaluar:

*¿Cuál es la recta que tiene el mayor valor de la constante de proporcionalidad? Justifique su respuesta.*



*A partir de los desempeños propuestos en las semanas 1, 2, 3, 4 y las evidencias de las actividades desarrolladas, analice tanto la información para determinar el alcance de los aprendizajes que han tenido los estudiantes, así como las dificultades y diseñe las estrategias que permitan promover el mejoramiento.*

# ¿Cómo las llaves inciden con el llenado de los tanques?



## IDEAS CLAVE:

- En las situaciones de variación proporcional inversa, una variable depende inversamente de la otra.
- En la variación proporcional inversa, una variable aumenta y la otra disminuye.
- Si en una variable se duplica o triplica, en la otra variable se reduce a la mitad o un tercio.
- El gráfico que representa una variación proporcional inversa es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes.



## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Caracterizo la proporcionalidad inversa.
- Explico las características de la proporcionalidad inversa.
- Utilizo las tablas y gráficas para resolver problemas.

### Primera sesión

*Cuando la relación entre dos variables es de proporcionalidad inversa se identifican las siguientes propiedades: 1) Si los valores de una de las variables aumentan -o disminuyen-, los valores de la otra disminuyen -o aumentan-. 2) Si los valores de una de las variables se duplican o triplican, los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad o la tercera parte.*

*3).La gráfica es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes -hipérbola-*

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes resuelvan una situación e identifiquen algunas características de la proporcionalidad inversa.

#### Materiales:

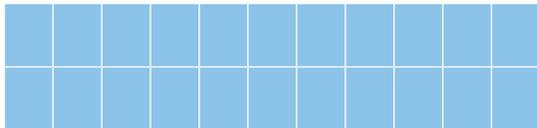
- Fotocopia de la situación.
- Papel y lápiz.
- Papel periódico o craft.
- Marcadores.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice grupos de tres estudiantes. A cada uno se le entrega la siguiente situación (página siguiente):

Un tanque de almacenamiento de agua de forma cilíndrica tiene una capacidad de 250 centímetros cúbicos y se sabe que una llave llena en 12 segundos 10 cc de este tanque.

- ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el tanque con una llave?
- ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el tanque con dos llaves?
- ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el tanque con diez llaves?
- Organicen los datos en una tabla hasta completar diez llaves:



- ¿Cuáles son las variables de la situación?
- ¿Es una situación de proporcionalidad directa?
- Elaboren la posible gráfica que representa esta situación.

Cada uno de los grupos elabora carteleras de la gráfica y la tabla. Pregúnteles: *¿El número de llaves altera el llenado del tanque, de qué modo? Valide respuestas que se relacionan con la idea "Entre más llaves abiertas menos tiempo de llenado o viceversa" y ¿cómo se observa esta idea en la tabla?* Los estudiantes tienen que mostrar que al aumentar el número de las llaves, el tiempo disminuye, entonces ¿cómo cambia una variable con respecto a la otra? Los estudiantes pueden mostrar un acercamiento aditivo, pero también se puede evidenciar un acercamiento multiplicativo, si el aditivo no se presenta:

Número de llaves	1	2	3	4
Tiempo llenado (segs)	300	150	100	75

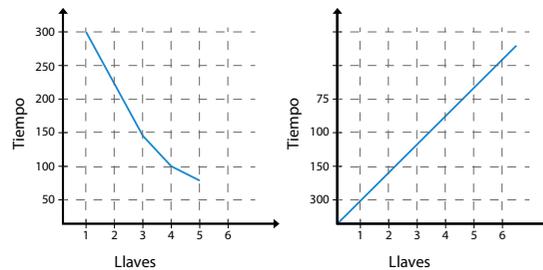
Arrows above the table show increments of +1 between columns. Arrows below the table show decrements of -150, -50, and -25 between rows.

Número de llaves	1	2	3	4
Tiempo llenado (segs)	300	150	100	75

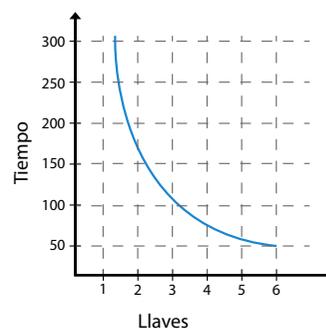
Arrows above the table show multiplicative relationships: x2 from 1 to 2, x3 from 1 to 3, and x4 from 1 to 4. Arrows below the table show additive relationships: +2 from 300 to 150, +3 from 150 to 100, and +4 from 100 to 75.

A nivel de la gráfica es posible que los estudiante no tengan en cuenta las escalas y representan una línea recta con los valores que se obtuvieron de la tabla, u otros invierten los valores de uno de los ejes para que les de una línea recta. Es necesario que oriente el manejo de las escalas y la ubicación de cada punto para que quede la curva y puedan reconocer en las carteleras cuál gráfica es la que está bien hecha.

**Gráficas con errores**



**Gráfica correcta**



*Aunque en estas gráficas no se tendrían que unir los puntos, ya que no se tiene una 'llave y media', se unen para observar el comportamiento global de la variación. Permita a los estudiantes realizar este trazo continuo. Existen unas situaciones que son solo puntos al representarlas gracias al tipo de magnitud ya que son discretas o enteras como el número de personas u objetos que no se pueden romper en partes.*

Ahora pregunte: *¿Cuáles son las características de la proporcionalidad directa?, ¿se cumplieron en la situación? y ¿qué características tiene la gráfica de esta situación?* Invítelos a decir cuáles son las características que tiene esta situación y que las anoten en el cuaderno. Tales apuntes deben coincidir con: 1). Las variables involucradas son número de llaves y el tiempo. 2). Al aumen-

tar la cantidad de las llaves, el tiempo de llenado del tanque disminuye. 3). Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de llaves, el tiempo se reduce a la mitad, tercera parte, etc. 4) El gráfico que representa la relación entre las variables es una curva. Indíqueles que una relación que tiene estas características recibe el nombre de **proporcionalidad inversa**.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes clasifiquen las situaciones en proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa.

#### Materiales:

- Fotocopia de las situaciones.
- Papel y lápiz.
- Papel periódico o craft.
- Marcadores.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice cuatro grupos y a cada uno le entrega una de las siguientes situaciones:

#### Situación 1

Si se sabe que Don Carlos siempre obtiene 60 litros de leche por día para su venta.

- Elaboren una tabla que relacione la cantidad de botellas y su capacidad para empacar la leche. Inicien con botellas de un litro de capacidad hasta completar 10 litros de capacidad.
- Elaboren la gráfica que representa la situación.
- Escriban las características que presentan las variables de la situación.

#### Situación 2

Se sabe que una fotocopidora toma 10 fotocopias en 12 segundos.

- Elaboren una tabla que relacione la cantidad de fotocopias y tiempo. Inicien con 1 fotocopia hasta 10 fotocopias.
- Elaboren la gráfica que representa la situación.
- Escriban las características que presentan las variables de la situación.

#### Situación 3

Un automóvil en media hora ha recorrido 50 Km y se sabe que va a velocidad constante.

- Elaboren la tabla hasta completar 4 horas.
- Elaboren la gráfica que representa la situación.
- Escriban las características que presentan las variables de la situación.

#### Situación 4

En una empresa que cultivan 10 000 flores se contratan 6 obreros para 30 días.

- Elaboren una tabla que relacione la cantidad de obreros y días de trabajo.
- Elaboren la gráfica que representa la situación.
- Escriban las características que presentan las variables de la situación.

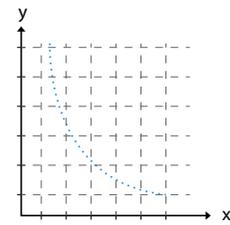
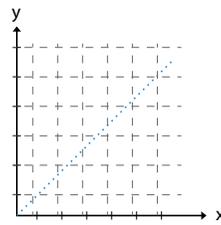
Los grupos las resuelven y exponen sus procedimientos y representaciones que serán exhibidas en carteleras realizadas por ellos. Recolecte evidencias de los procedimientos efectuados por estudiantes que establecen razo-

nes entre las mismas variables y los que establecen razones entre las distintas variables y promueva entre los estudiantes que validen los procedimientos y explicaciones sobre la pertinencia de la respuesta. Al finalizar esta parte es nece-

sario socializar los procedimientos y clasificarlos a nivel de uso del factor escalar, el factor funcional o la regla de tres y resalte el uso de establecer una proporción para resolver este tipo de situaciones.

Además, oriente la discusión con: *¿Cuáles son las situaciones de variación proporcional directa y cuáles son las situaciones de variación proporcional inversa?* Exíjales que justifiquen sus afirmaciones. Paralelamente, elabore en el tablero las características que cumple la proporcionalidad directa e inversa.

Para cerrar la sesión y como actividad de evaluación, cada uno de los estudiantes tiene que generar una situa-



ción por cada una de las gráficas que se presentan a continuación:

Además, solicite a los estudiantes que escriba su reflexión tanto sobre la pregunta de la secuencia como la que se estableció para esta semana.

# ¿Cómo varían otros aspectos de los tanques de almacenamiento?

## ! IDEAS CLAVE:

- La constante de proporcionalidad inversa, como producto de los datos, es un valor único.
- La proporcionalidad inversa permite inferir datos a través de la interpolación y extrapolación.
- La condición de que en las variables, una aumenta y la otra disminuye, es una condición de la proporcionalidad inversa pero no es suficiente para determinarla.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Determino la constante de proporcionalidad inversa.
- Ejercito algunos procedimientos estandarizados.
- Explico algunas estrategias para solucionar problemas.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes realicen el experimento de sacar agua del recipiente para comprender como se relacionan las variables altura y número de vasos extraídos del recipiente.

#### Materiales:

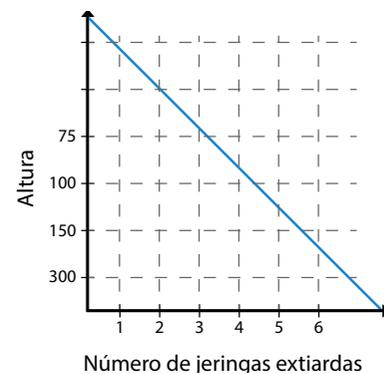
- 1 botella de plástico transparente o 1 recipiente de plástico de forma cilíndrica.
- 1 jeringa de 10 ml con medidas y sin aguja.
- 1 rollo de cinta de enmascarar.
- 1 tijeras.
- 1 lápiz y papel.
- 1 litro de agua.
- 1 jarra para vaciar el líquido.
- 1 regla graduada.

En caso de no tener botellas de plástico transparente, se sugiere que utilice vasos de vidrio que tengan la forma cilíndrica y su llenado se realice con tapas de gaseosa. Solicite el material a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan grupos de 5 estudiantes. Se les indica que tienen que colocar la cinta de enmascarar en el recipiente de forma cilíndrica o en la botella (de la misma forma como se utilizó en la primer semana) y llenarlo. El experimento consiste en llenar jeringas de agua que se retira del recipiente y se marca la altura que se va obteniendo en la cinta. Los grupos tienen que anticipar cuál es la gráfica que quedaría de esta experiencia y anotarla en el cuaderno. Al realizar la experiencia los estudiantes deben que realizar la tabla y la gráfica con los datos obtenidos. Luego, verificar esta gráfica con la que habían anticipado anteriormente. Oriente la discusión a partir de las siguientes preguntas: *¿Si aumenta la cantidad de jeringas que se usan para retirar agua, qué sucede con la altura del agua en el recipiente?, ¿Si se duplica la canti-*

dad de jeringas que se retiran, disminuye la mitad de la altura del recipiente?, ¿cómo es el gráfico que representa la relación entre las variables? y ¿se cumplieron las características de una variación proporcional inversa? Las respuestas de los estudiantes deben enfocarse a que existen situaciones, como la estudiada, que cumplen la condición de que una variable aumenta y la otra disminuye, pero no son de proporcionalidad inversa; aunque existen otras características que no se cumplen como al duplicar la cantidad de jeringas que se usan para retirar agua no les corresponde la mitad de la altura del recipiente; el gráfico que representa la situación es una recta que no pasa por el origen e intercepta a los dos ejes, como se muestra a continuación:



Para cerrar, coloque la siguiente situación para evaluar:

La siguiente tabla muestra la cantidad de dinero que se gasta un empleado después de recibir el sueldo.

Días	1	5	10	15	20	25	30
Dinero gastado del sueldo	600 000	500 000	400 000	300 000	200 000	100 000	20 000

- Elabore la gráfica correspondiente.
- Explique cómo arreglaría la situación para que sea de proporcionalidad inversa.

## Segunda sesión

*La constante de proporcionalidad es una constante que se obtiene del producto de los valores de las variables y que su valor es único. Este enfoque le da sentido algunos de los pasos de la regla de tres y al procedimiento de invertir una razón para construir una proporción con la otra.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes determinen la constante de proporcionalidad inversa.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación de las llaves en un tanque.
- Tabla elaborada de la situación.
- Lápiz y papel.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan los mismos grupos de la sesión anterior. Se les solicita a cada uno de los grupos que establezcan una relación numérica constante entre los datos de la tabla. Recolecte evidencias de algunas de las discusiones

de los grupos e indíqueles que determinen el producto o el cociente entre ellos. Realice la siguiente pregunta: **¿Se obtiene el mismo producto en todos los casos de la tabla?** e indíqueles que establezcan el tiempo de llenado que requieren seis llaves y luego nueve llaves y que se tiene que cumplir con el valor del producto; aclare que este valor se denomina constante de proporcionalidad. Solicite a los estudiantes que expongan sus procedimientos y que realicen aclaraciones si otros compañeros lo requieren. Invítelos a que analicen la regla de tres para este tipo de casos y cómo se utiliza la constante de proporcionalidad inversa.

## Actividad 2

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes resuelvan situaciones de proporcionalidad inversa.

### Materiales:

- Fotocopia de situación problema.
- Lápiz y papel.

### Desarrollo Propuesto:

Se organizan cuatro grupos. Cada uno debe resolver una situación mediante la realización de una tabla y de una gráfica que correspondan a la variación proporcional inversa.

#### Situación 1

Tres obreros tardan 10 días en armar un tanque no cilíndrico. ¿Cuántos días tardarán seis obreros en hacer el mismo trabajo?

#### Situación 3

Cuatro tuberías tardan seis horas en llenar un tanque. Si se colocan seis tuberías, ¿cuánto se tarda en llenar un tanque?

#### Situación 2

De una lámina de  $300 \text{ m}^2$ , se construyen 4 tanques en forma de prisma cuadrangular de la misma área cada uno.

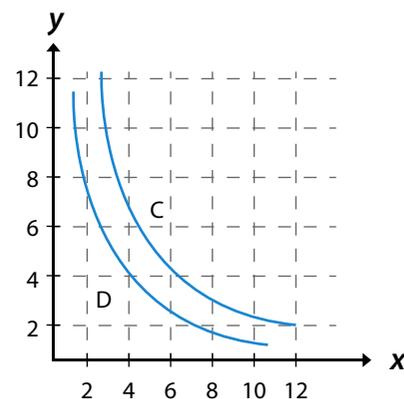
Si se hacen 6 tanques, con la misma lámina, ¿cuál es el área para cada uno?

#### Situación 4

3 máquinas tardan 20 minutos en levantar un tanque. ¿Cuánto tardan 2 máquinas en levantar el mismo tanque?

Cada uno de los grupos se intercambia los cuadernos, mientras verifica que el procedimiento, la tabla y la gráfica están bien hechos ya que todos son situaciones de variación proporcional. Organice una puesta en común y genere la discusión a través de las siguientes preguntas: *¿Cuáles la constante de proporcionalidad inversa de cada situación?* (valide las respuestas que se refieren al resultado de multiplicar los valores de cada variable que sean correspondientes), *¿cómo la emplearon para resolver las situaciones?* (Ellos pueden realizar una multiplicación incompleta o una división por cada uno de los valores que conforman la tabla). *¿Cómo son las gráficas de cada una de las situaciones?* (Todas las gráficas ese expresan con una curva que se acerca a los ejes).

Para cerrar la sesión emplee la siguiente situación evaluativa para que los estudiantes determinen cuál es la constante de proporcionalidad inversa mayor, si se presentan dos situaciones en la misma gráfica:



Además, los estudiantes deben contestar la pregunta de la semana, evaluar lo que aprendieron y analizar cómo las actividades contribuyen a la respuesta del problema que orienta la secuencia.

# ¿Cómo describir variaciones con el llenado de tanques de almacenamiento?

## ! IDEAS CLAVE:

- Características de la variación de la proporcionalidad directa e inversa.
- Representaciones tabulares y gráficas correspondientes a la variación proporcional.
- Procesos de interpolación y extrapolación en la variación proporcional.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Caracterizo la variación proporcional directa e inversa.
- Formulo y justifico procedimientos para resolver situaciones de proporcionalidad.
- Interpreto diferentes representaciones que se asocian a la variación proporcional.
- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa.
- Resuelvo problemas de variación proporcional en diversos contextos.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se comparten dudas y respuestas de cada una de las semanas.

#### Materiales:

- Papel y lápiz.
- Anotaciones del cuaderno.

#### Desarrollo Propuesto:

Se propone que los estudiantes revisen sus respuestas a las preguntas de cada una de las semanas y sus contribuciones

a la pregunta de la secuencia. La invitación es que cada estudiante genere y redacte preguntas para que sean leídas y aclaradas por el grupo. A cada uno de los estudiantes se le invita a que contesten las preguntas hechas por los otros. En ese caso, particularmente usted puede evaluar y recolectar evidencias de la capacidad argumentativa y manejo conceptual de la variación proporcional de los estudiantes cuando unos le aclaran a los otros los aspectos a resolver.

## Actividad 2

**En qué consiste:** Se comparte soluciones de la situación problema que orientó la secuencia.

### Materiales:

- Fotocopia de la situación problema que orientó la secuencia.
- Anotaciones del cuaderno.
- Papel periódico o papel craft.
- Marcadores.

### Desarrollo Propuesto:

Organice cuatro grupos. Cada uno de los grupos da las respuestas a las preguntas que se construyeron en la primera semana con relación al problema y se analiza la pertinencia de éstas con la situación. Además, asigne a cada uno

de los grupos que elaboren la respuesta a la situación así: Un grupo elaborará la respuesta cuando los tanques son de forma cilíndrica; otro elaborará la respuesta cuando los tanques son más anchos arriba que abajo; otro elaborará la respuesta cuando los tanques son más anchos abajo que arriba y otros cuando a los tanques se le adecuan llaves. Cada grupo realiza las carteleras correspondientes y las expone a los demás. Valide la información que se relaciona con el tipo de gráficas que se generan en cada una de las situaciones y cuáles son las condiciones que pertenecen a la variación proporcional durante la experiencia del llenado de recipientes.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes construyan un mapa conceptual.

### Materiales:

- Papel periódico o papel craft.
- Marcadores.

### Desarrollo Propuesto:

Cada uno de los estudiantes dan criterios que se relacionen con las nociones matemáticas trabajadas durante el desarrollo de la secuencia como *razón, proporción, cambio, proporcionalidad, interpolación, extrapolación, regla de tres, factor escalar, factor funcional, inversa, directa, no*

*es proporcional, duplicar, triplicar, mitad, tercera parte, procedimiento, gráfica, tabla, constante de proporcionalidad y variación.*

Ahora, organice los mismos grupos de la sesión anterior. Con estas palabras, cada uno de los grupos construye un mapa conceptual. Luego, cada uno lo expone, lo explica y se selecciona el que mejor represente las conexiones con lo trabajado durante la ejecución de la secuencia. Es preciso que los demás estudiantes tomen apuntes del mapa conceptual seleccionado.

# Cierre y Evaluación

## ! IDEAS CLAVE:

- Aplicación de la proporcionalidad directa e inversa.



## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Empleo las características de los tipos de proporcionalidad.
- Resuelvo problemas de proporcionalidad.

### Primera sesión

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes resuelvan las siguientes situaciones.

#### Materiales:

- Papel y lápiz.
- Fotocopia de las situaciones.

#### Desarrollo Propuesto:

Se sugiere que cada uno de los estudiantes tenga las siguientes situaciones para resolverlas en una hoja:

**Situación 1:** De cada una de las gráficas o tablas determine cuáles son de proporcionalidad directa o inversa.

Justifique la respuesta.

Relación semillas por m<sup>2</sup>

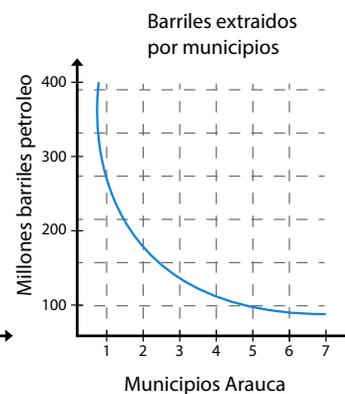
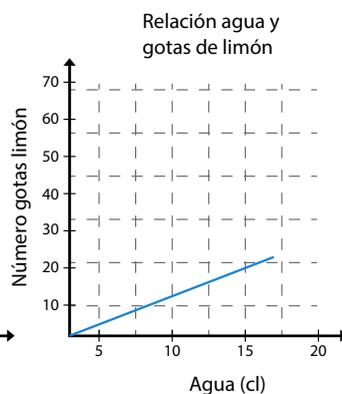
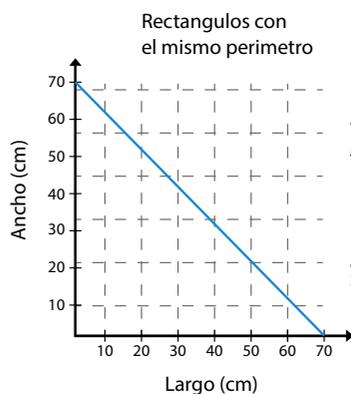
Semillas (libras)	0,5	1	1,5	2
Terreno m <sup>2</sup>	10	20	30	40

Producción virus por minutos

Tiempo (min)	1	2	3	4	5
Número de virus	5	25	125	625	3125

Producción máquinas refrigerantes

Tiempo (horas)	2	3	4	5
Máquinas refrigerantes	240	160	120	96



De cada una, construya una situación problema.

Al finalizar, cada uno de los estudiantes intercambia sus pruebas y analizan la calidad de las justificaciones. Oriente la revisión con la pregunta ¿Qué significa que está bien? En algunos estudiantes el valorativo “está bien” se refiere a que es correcto porque lo hizo igual a lo que él hizo, por tal razón es necesario que les indique que es con relación a lo desarrollado sobre la variación proporcional. Cada uno de los estudiantes evaluadores escribe la respuesta de esta pregunta en la hoja de su compañero. Luego, recolecte evidencias recogiendo las producciones escritas de los estudiantes y pregunte sobre las dudas que se les presentaron con la situación e invite a otros a aclararla.

## Segunda sesión

### Desarrollo Propuesto:

Continúe con las siguientes situaciones para que los estudiantes las resuelvan:

**Situación 2:** Un estudiante realiza el siguiente procedimiento para llenar la tabla. ¿Cómo usted lo ayudaría para que la mejore?:

- En la panadería Don Chinche tienen una tabla de precios de acuerdo al número de panes. Complete la tabla.

Número de panes	1	2	3	4	5	6
Valor total (\$)	1 200	2 400	3 600	<b>4.800</b>	<b>6.000</b>	<b>7.200</b>

- El procedimiento que realizó es el siguiente:

$$\begin{array}{r}
 1200 \\
 + 1200 \\
 \hline
 2400 \\
 + 1200 \\
 \hline
 3600 \\
 + 1200 \\
 \hline
 4800 \\
 + 1200 \\
 \hline
 6000 \\
 + 1200 \\
 \hline
 7200
 \end{array}$$

**Situación 3:** Resuelva las siguientes situaciones. Describa el procedimiento que utiliza y por qué lo considera lo más pertinente y eficiente para los cálculos.

- Camilo siempre compra 450 arrobas de concentrado para el ganado. Cada mes, nacen tres becerros más. Si actualmente se tienen 23 cabezas de ganado, ¿en ocho meses, cuánto concentrado se tendrá que comprar?
- Siete máquinas de riego requieren 900 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua requieren diez máquinas?
- Tres grifos llenan un depósito de 10 m<sup>3</sup> en 5 horas. Si se tiene el doble de grifos, ¿cuánto tiempo tardará en llenar el mismo depósito?

Recoja las producciones de los estudiantes. De nuevo pregunte sobre las dudas que se les presentaron y busque que los otros las ayuden a esclarecer, siempre y cuando estas dudas se refieran a lo conceptual trabajado en la secuencia.

## Instrumento para las evaluaciones del aprendizaje

El aprendizaje relacionado con la variación proporcional directa e inversa se hace evidente cuando los estudiantes reconocen sus características a través de las representaciones de tablas y gráficas. En la siguiente tabla se presentan algunas descripciones que permiten valorar algunos de los procesos matemáticos que se evidencian en la secuencia. Esta puede ser utilizada por el docente para determinar el nivel de aprendizaje que logró el estudiante en la ejecución de la secuencia.

REPRESENTACIONES VARIACIÓN PROPORCIONAL	TABLAS	GRÁFICAS
DIRECTA	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Establece razones internas de una magnitud y corrobora que sea la misma entre las razones internas de la otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Determina que al aumentar los valores de una magnitud, también aumentan en la otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Encuentra que si suma los valores de una magnitud, el resultado es correspondiente con el resultado de la suma de los valores de la otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Calcula la constante de proporcionalidad como cociente de los datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Verifica que sea una línea recta.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica que la recta inicia en el punto de origen.</li> <li><input type="checkbox"/> Determina que al aumentar los valores de una magnitud, también deben aumentar los valores en la otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica la constante de proporcionalidad con la inclinación de la recta.</li> </ul>
INVERSA	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Establece razones internas de una magnitud y corrobora que sea la inversa entre las razones internas de la otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Determina que al aumentar los valores de una magnitud, se disminuye en la otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Determina razones como factores escalares inversos.</li> <li><input type="checkbox"/> Calcula la constante de proporcionalidad inversa como el producto de los datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Verifica que se forme una curva.</li> <li><input type="checkbox"/> Determina que la curva inicia cerca a un eje, y al aumentar los valores se acerca al otro eje.</li> </ul>



**MATEMÁTICAS**  
**GRADO OCTAVO**

Secuencia Didáctica

---

¿Cuál es la  
probabilidad  
de obtener un  
resultado falso?

# ¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?

## Visión General

El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado octavo construyan métodos para determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento para un fenómeno aleatorio. La situación problema que orienta la secuencia es:

*Un veterinario debe determinar qué reses están enfermas de ántrax o de fiebre aftosa en una región del país. El veterinario decide realizar exámenes de sangre para cerciorarse de que las reses presentan o no alguna de las enfermedades y determinar el número de reses a sacrificar en el caso de tener alguna de las enfermedades en una etapa muy avanzada, o aplicar algún tipo de antibiótico si están en su etapa inicial. A pesar del examen, el veterinario tiene temor de tomar decisiones equivocadas porque sabe que algunas pruebas médicas o procedimientos de vigilancia generan falsos positivos o falsos negativos.*

Es por eso que la secuencia se propone acciones para resolver la pregunta: **¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?** Además contribuye al desarrollo del pensamiento matemático y de habilidades comunicativas puesto que permite interpretar y manejar la incertidumbre presente en la realidad y acrecentar las habilidades comunicativas para justificar sus conjeturas, comprobaciones y decisiones cuando tratan situaciones aleatorias. Así mismo, esta secuencia logra establecer una medida para determinar cuándo un evento es probable, seguro, improbable e imposible, y reconocer diferencias entre los datos que arrojan la experimentación y el cálculo probabilístico.

La secuencia didáctica en la semana 1, los estudiantes exploran la situación problema y algunas situaciones del azar para determinar algunos eventos y concluir que es posible definir los resultados pero no saber cuándo ocurren. En la semana 2, los estudiantes, a través de enunciados de distintos fenómenos, puedan diferenciar cuáles son determinísticos o aleatorios, y a partir de estos últimos, determinen los eventos o sucesos que ocurren para establecer el espacio muestral. En las semanas 3 y 4, los estudiantes conocen tres formas para abordar la probabilidad que son la frecuencia relativa, el cociente y/o la forma subjetiva; paralelamente, se usan las representaciones numéricas ( , decimal y porcentaje) para expresar la probabilidad y la escala que define categorías de la ocurrencia de un evento. En la semana 5 y 6, los estudiantes mejoran sus métodos empleando la regla de la suma y de la multiplicación para calcular probabilidades de eventos independientes o dependientes.

En la semana 7 se da cierre a la secuencia retomando la situación problema y lo desarrollado en el transcurso de las anteriores semanas para que los estudiantes construyan una respuesta y manifiesten las dudas,

---

cuestionamientos o aclaraciones de la revisión de los apuntes frente a lo estudiado. En la semana 8, los estudiantes demostrarán aún más sus aprendizajes cuando se enfrenten a la probabilidad en otros contextos. Simultáneamente, el desarrollo de la secuencia establece momentos de evaluación que junto al INSTRUMENTO PARA LAS EVALUACIONES DEL APRENDIZAJE pueden ayudar al docente a determinar los aprendizajes de los estudiantes. Además, se recuerda que la evaluación debe ser continua y permanente a lo largo del proceso educativo, en el que a la vez que se enseña, se evalúa y se aprende, pues todo acto de evaluación implica un aprendizaje.

Los desempeños esperados de un estudiante para esta secuencia didáctica son:

- Identifico las características de los fenómenos determinísticos y aleatorios.
- Uso conceptos básicos de probabilidad.
- Calculo la probabilidad de eventos usando métodos diversos.
- Uso diferentes registros para representar la probabilidad como porcentajes, fraccionarios y decimales.
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con modelos para calcular la probabilidad.
- Produzco textos orales y escritos que evidencian el conocimiento que he alcanzado acerca de un fenómeno aleatorio.

*¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?*

SEMANA	PREGUNTAS GUÍA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS
1	<i>¿Qué resultados tendría con los exámenes médicos realizados a las reses?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Las experiencias de azar se relacionan con reconocer posibles resultados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elaboro explicaciones sobre los fenómenos.</li> <li>Determino los resultados posibles de una situación.</li> </ul>
2	<i>¿Qué situaciones puede estudiar un veterinario cuando se presenten enfermedades en el ganado?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La existencia de dos tipos de situaciones que se contraponen: Aquellos resultados que se pueden predecir con seguridad (experimentos determinísticos) y aquellos donde no es posible determinar un resultado dado (experimentos aleatorios).</li> <li>El espacio muestral como el conjunto de todos los eventos o sucesos posibles.</li> <li>Métodos como listados, diagramas de árbol y tablas de doble entrada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Clasifico algunos fenómenos.</li> <li>Genero ejemplos de cada uno de los fenómenos.</li> <li>Justifico mis afirmaciones.</li> </ul>
3	<i>¿Qué probabilidad tiene una res para ser salvada?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La relación de la probabilidad con la combinatoria.</li> <li>La frecuencia relativa como indicador de la probabilidad de un suceso.</li> <li>La probabilidad como razón o cociente.</li> <li>La probabilidad subjetiva como valores estimados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizo las frecuencias para contar resultados.</li> <li>Determino una conjetura para predecir los resultados.</li> <li>Genero procedimientos propios para calcular la probabilidad.</li> <li>Comunico mis conclusiones.</li> </ul>
4	<i>¿Cuáles números representan la probabilidad de un resultado falso?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Representaciones numéricas (<math>\frac{a}{b}</math>, decimal y porcentaje) para definir la probabilidad.</li> <li>La escala 0 a 1 define categorías de ocurrencia de un evento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Asocio la escala numérica con la escala cualitativa.</li> <li>Genero conjeturas sobre la probabilidad de un suceso.</li> <li>Calculo probabilidades de eventos.</li> </ul>
5	<i>¿Cuál es la probabilidad de que la res tenga las dos enfermedades?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La regla de la suma como método para calcular la probabilidad de ocurrencia de varios eventos a la vez.</li> <li>Clasificación de los eventos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ejercito la regla de la suma para calcular la probabilidad.</li> <li>Justifico las características de las situaciones para aplicar la regla de la suma.</li> </ul>
6	<i>¿Cuál es la probabilidad de aplicar un tratamiento específico según los resultados?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La regla de la multiplicación como método para calcular eventos que dependen del orden de aparición.</li> <li>Clasificación de los eventos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ejercito la regla de la multiplicación para calcular la probabilidad.</li> <li>Justifico las características de las situaciones para aplicar la regla de la multiplicación.</li> </ul>
7	<i>¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Características de la probabilidad.</li> <li>La relación entre suceso, resultados posibles, espacio muestral, frecuencia relativa, combinatoria y proporcionalidad.</li> <li>Métodos como listados, diagramas de árbol y técnicas de conteo, regla de la suma y regla de la multiplicación.</li> <li>Clasificación de los eventos probables.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifico las características de los fenómenos determinísticos y aleatorios.</li> <li>Uso conceptos básicos de probabilidad.</li> <li>Calculo la probabilidad de eventos usando métodos diversos.</li> <li>Uso diferentes registros para representar la probabilidad como porcentajes, fraccionarios y decimales.</li> <li>Comparo resultados de experimentos aleatorios con modelos para calcular la probabilidad.</li> <li>Produzco textos orales y escritos que evidencian el conocimiento que he alcanzado acerca de un fenómeno aleatorio.</li> </ul>
8	<b>Cierre y Evaluación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La probabilidad de ocurrencia de eventos en diferentes contextos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifico el uso la probabilidad en diferentes contextos.</li> </ul>

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- Exploración de la actividad problema a través de preguntas sobre el conocimiento de enfermedades del ganado y la declaración de algunos de los conocimientos matemáticos que se requieren para la construcción de una respuesta.
  - Situaciones de azar relacionadas con lanzamientos de dados y monedas para determinar los resultados posibles. Algunas situaciones relacionadas con juegos de la baraja española.
  - Discusiones orientadas a definir algunas características de los fenómenos aleatorios.
- 
- Actividades de clasificación de situaciones en fenómenos determinísticos o aleatorios. Los estudiantes tienen que elaborar una lista de características que las diferencien.
  - Juegos de azar como lanzar dados, monedas o las cartas de la baraja española, junto con descripciones de los posibles resultados para determinar el espacio muestral.
  - Las discusiones de los estudiantes giran en torno a las características de los fenómenos aleatorios y determinísticos como el espacio muestral.
- 
- Se juega con lanzar monedas al tiempo. Se inicia con 1, 2, 3 y 4 monedas. Se deben determinar todos los resultados posibles y registrar en una tabla sus frecuencias. Mínimo de lanzamientos: 20 veces. Luego, se estudiará lo que ocurre si lanzo cien veces o doscientas veces una moneda para determinar la posibilidad de estabilidad que presenta la aparición de cada uno de los sucesos o eventos.
  - Actividades para determinar la probabilidad de eventos o sucesos con cartas de una baraja y el problema central.
  - Discusiones sobre las tres formas de determinar la probabilidad.
- 
- Aborda los posibles números que representan la probabilidad de un resultado falso o verdadero del problema central de la secuencia.
  - Determina la probabilidad de uno de los resultados de ocurrencia al lanzar cartas, dados o monedas.
  - Discusión entre los términos *imposible*, *posible*, *seguro* con la asignación numérica  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  y  $1$ . Igualmente, se relaciona sus registros decimales y de porcentaje.
- 
- Actividades para determinar la probabilidad de que las reses presenten las dos enfermedades.
  - Diversas situaciones que requieren la probabilidad de dos o más eventos.
  - Discusiones sobre las características de las situaciones para aplicar la regla de la suma.
- 
- Actividades para determinar la probabilidad de algunas decisiones frente al tratamiento según el resultado del examen.
  - Diversas situaciones que requieren la probabilidad de dos o más eventos.
  - Discusiones sobre las características de las situaciones para aplicar la regla de la multiplicación.
- 
- Se retoma la situación problema planteada en la secuencia y se invita a los estudiantes a dar respuesta a la pregunta a partir de las elaboraciones construidas a lo largo de la misma.
  - Se proponen discusiones para que los estudiantes reflexionen sobre las características de la probabilidad y expliciten lo que aprendieron con las actividades vividas con la secuencia.
- 
- El proceso de evaluación se apoya en noticias para determinar si las probabilidades son posibles que ocurran como se declaran.
  - A los estudiantes se les dan varias situaciones para que empleen la probabilidad.

# ¿Qué resultados tendría con los exámenes médicos realizados a las reses?

## ! IDEAS CLAVE:

- Las experiencias de azar se relacionan con reconocer posibles resultados.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Elaboro explicaciones sobre los fenómenos.
- Determino los resultados posibles de una situación.

Inicie la secuencia didáctica explorando los saberes previos de los estudiantes para determinar qué saben y qué no saben con respecto a la temática a trabajar. Esta exploración corresponde a una evaluación diagnóstica que le permite a usted identificar el lugar de donde puede partir para la construcción de conocimiento. Puede realizarla por medio de actividades orales, escritas y juegos, entre otros. Además, la evaluación diagnóstica le permite establecer un punto inicial, adecuar las actividades a los estudiantes y evidenciar el desarrollo de competencias durante la secuencia didáctica.

## Primera sesión

*En la vida cotidiana se presentan numerosas situaciones en las que está implicada la incertidumbre y en las que hay que tomar decisiones contando con o sin información. Una de las herramientas que permite evaluar la incertidumbre es la probabilidad.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes comprendan el problema a resolver con la secuencia.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación.
- Hojas de papel y lápiz.
- Diccionario.

Si es posible que tengan acceso a internet puede consultar con los estudiantes los aspectos de la situación.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice grupos de tres estudiantes y pídale que lean la siguiente situación:

Un veterinario debe determinar qué reses están enfermas de ántrax, o de fiebre aftosa en una región del país. El veterinario decide realizar exámenes de sangre para cerciorarse de que las reses presentan alguna de las enfermedades y determinar el número de reses a sacrificar en el caso de tener alguna de las enfermedades en una etapa muy avanzada, o aplicar algún tipo de antibiótico si están en su etapa inicial. A pesar del examen, el veterinario tiene temor de tomar decisiones equivocadas porque sabe que algunas pruebas médicas o procedimientos de vigilancia generan o falsos positivos, o falsos negativos.

Indíqueles que diligencien la siguiente tabla:

¿Qué buscamos?	¿Qué información tenemos?	¿Qué conocimientos matemáticos necesitamos para resolverlo?

A la vez, invítelos a que elaboren dos listas, una de palabras claves y palabras desconocidas que traten de la situación y otra de las matemáticas que se requieren. Aproximadamente deje 20 minutos para este trabajo. Organice una puesta en común e invítelos a que compartan qué es lo que buscamos. Luego escriba las palabras claves de cada grupo en el tablero e indíqueles que con esas palabras elaboren un mapa conceptual que muestre cómo se conectan. Después de elaborado, indíqueles que coloren de azul las palabras que tienen que ver con la información que tenemos y con verde los conocimientos que se requieren. Luego, estimule a los estudiantes a dar información de estas enfermedades en el ganado, y dígame la siguiente información:

*La fiebre aftosa se caracteriza por lesiones y llagas en los pies, tetillas, boca, ubres entre otros, que afectan la calidad de la carne y la leche. El ántrax es una fiebre que afecta el movimiento, la producción de leche y afecta las vías respiratorias. Ambas enfermedades son contagiosas y mortales.*

Más tarde, divídalos en grupos y pídale a cada uno que empiecen a resolver la situación problema e indíqueles que se apoyen en lo matemático. Recolecte evidencias de las preguntas que le hacen los estudiantes; dado que no hay datos, es posible que pregunten *¿qué es (significa) tener resultados falsos?* y *¿Si hay datos falsos entonces existen*

*verdaderos?* En ese caso enuncie la siguiente información: Son términos que se usan en las pruebas médicas:

**Falso positivo:** La prueba indica incorrectamente que la res tiene la enfermedad cuando realmente la res está sana.

**Falso negativo:** La prueba indica incorrectamente que está sana, cuando en realidad la res está enferma.

**Verdadero positivo:** La prueba indica correctamente que la res tiene la enfermedad cuando en realidad lo está.

**Verdadero negativo:** La prueba indica correctamente que la res no tiene la enfermedad cuando realmente no lo está.

Así mismo los estudiantes muestran agrupaciones de las reses tanto sanas como enfermas (algunos casos de forma desordenada), según la enfermedad o el resultado del examen y otros expresan algunas ideas de probabilidad asociadas a la *posibilidad*; muy pocos enuncian un número u otros dirán que depende del número de reses que han de estudiar. Por lo tanto, es necesario que los estudiantes manifiesten todas estas dudas y solicítele que las registren en el cuaderno para que sean sus preguntas a las que se les dará respuesta en el desarrollo de la secuencia. Así mismo, los estudiantes deben realizar un análisis de la solución del problema que plantearon o lo que llevan hasta el momento, e indíqueles que expliciten qué de matemáticas están empleando ahí. Posiblemente respondan *'nada'* porque no se tiene números. Continúe recolectando evidencias de los argumentos que dan los estudiantes al respecto para que sirvan de reflexión más adelante.

# SEMANA 1

*Dado que la probabilidad está recientemente incluida en el currículo, muchos adultos la consideran innecesaria en el desarrollo de las competencias del ciudadano, pero es una de*

*las herramientas que le dan la capacidad de tomar decisiones de vida acorde al contraste entre la reflexión y la experiencia para determinar el resultado más favorable.*

## Actividad 2

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes exploren algunas situaciones del azar al lanzar monedas.

### Materiales:

- 3 monedas de diferente nominación.

### Desarrollo Propuesto:

En forma individual cada uno de los estudiantes escriben en su cuaderno las respuestas a: *¿Cuáles son los resultados al lanzar una moneda?, ¿cuáles son los resultados al lanzar dos monedas? y ¿cuáles son los resultados al lanzar tres monedas?* Con relación a la primera pregunta, las respuestas de los estudiantes se encaminan a determinar que es cara o sello; en las otras, los estudiantes solo dan un caso o los que son iguales, o solo establecen uno distinto con respecto a las caras de las monedas que pueden ser vistas. Mencíóneles que esas son sus predicciones de los resultados. Ahora, organice grupos de 4 estudiantes y establezca el juego “Gana puntos” que consiste en que antes de lanzar una moneda, una pareja predice los resultados; se hace el lanzamiento de las monedas y si atina gana un punto, en caso contrario pierde un punto. Finaliza el juego cuando una pareja obtiene dos veces seguidas el mismo resultado; se cuentan los puntos para determinar la pareja que obtuvo más puntos y gana 20 puntos más, pues fue el grupo que tuvo más respuestas posibles. Solicítele que comparen lo que habían predicho con los resultados.

De forma similar realice el juego con lanzar 2 y 3 monedas que sean de diferente nominación para que los estudiantes puedan discriminar cuál es la moneda que le da como resultado cara o sello. Al finalizar, los estudiantes registran los resultados distintos que pueden tener de cada lanzamiento, de la siguiente forma:

Una moneda de 500	Dos monedas	
	De 100	De 500
Cara 	Cara 	Cara 
Sello 	Cara 	Sello 
	Sello 	Cara 
	Sello 	Sello 

Tres monedas		
De 100	De 200	De 500
Cara 	Cara 	Cara 
Cara 	Cara 	Sello 
Cara 	Sello 	Cara 
Cara 	Sello 	Sello 
Sello 	Cara 	Cara 
Sello 	Cara 	Sello 
Sello 	Sello 	Cara 
Sello 	Sello 	Cara 
Sello 	Sello 	Sello 

Solicite a los estudiantes que comparen lo que se había anticipado con los resultados. Ahora pregúnteles: *¿Es posible determinar con toda seguridad qué resultado saldrá antes de lanzar la moneda?, es posible afirmar que en el lanzamiento de dos monedas ambas caigan caras?, ¿cuál de los siguientes resultados al lanzar tres monedas es más seguro que pase: todas las monedas caen cara o*

*sello; ó, dos de las monedas tienen el mismo resultado?* Valide ideas como que se acerquen a que no es posible asegurar que saldrá en un momento determinado pero si es posible conocer las opciones de lo que saldrá en un lanzamiento; y, es más probable que caigan si se tiene más opciones. Este es un momento adecuado para cerrar la sesión.

## Segunda sesión

*La probabilidad nace como una ciencia empírica ligada a los juegos de azar y al estudio de sucesos o eventos elementales. El primero en reflexionarla fue Pacioli (1494) planteando un problema de repartición de las ganancias de una partida interrumpida que fue resuelto en 1654 por Pascal y Fermat. Ellos inician el estudio sistemático de las leyes de azar, luego se le atribuye a Huygens el concepto de expectativa para un juego equitativo; Leibnitz contribuye desde la filosofía a la teoría de probabilidades y Bernoulli propone las primeras aproximaciones al cálculo de las probabilidades. Todo se desarrolló desde el contexto de los juegos.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes exploren algunas situaciones de azar en contextos de los juegos como lanzar dados y el juego de cartas.

#### Materiales:

- 2 dados.
- 1 baraja de cartas españolas (40 o 48 cartas).

Se tiene que garantizar la cantidad de dados y barajas para todos los grupos.

#### Desarrollo Propuesto:

Cada grupo está conformado por 6 estudiantes y se organizan dos equipos, si es posible de 3 estudiantes cada uno. Invítelos a describir tanto los dados como las cartas. Con relación a los dados oriente la descripción con las preguntas: *¿Cuánto suman los puntos de las caras que son opuestas en el dado?, ¿cuánto suman los puntos que están en las caras contiguas a la cara que tiene el punto 1?, ¿ese resultado es el mismo en cualquier dado?, ¿Cuánto suman los puntos que están en las caras contiguas a la cara que tiene el punto 3?* En todos los casos, las respuestas se relacionan con múltiplos del siete. Ahora, invítelos a lanzar diez veces dos dados. Si la suma de los dados es par, se gana tres puntos y si la suma

es impar se pierde un punto. Al finalizar, pregunte: *¿Es equitativo el juego, por qué?*

Ahora, con relación a las cartas de la baraja española, oriente la descripción de los estudiantes con las siguientes preguntas: *¿Cuántas cartas hay?, ¿cuántos palos hay, (cualquiera de las categorías en que se dividen las cartas de la baraja, y se representa por un símbolo, -copas, oros, bastos y espadas-) ¿cuántas cartas de cada palo hay?, ¿cuántas cartas son sotas?, ¿cuántas cartas son caballos?, ¿cuántas cartas son reyes?, ¿cuántas cartas son ases?, ¿cómo están enumeradas las cartas?* Es necesario establecer con los estudiantes un vocabulario sobre la forma de nombrar las fichas como: la baraja española consiste en un mazo de 40 cartas aunque existen otras de 48 o 50. Se clasifican en cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos; cada uno numerado del 1 al 12, en el caso de 40, no existe el 8 y el 9. Los números 1, 10, 11 y 12 corresponden al "as", "sota", "caballo" y "rey" respectivamente, estas fichas se conocen como figuras. A las cartas del 1 al 7 se le conocen como números.



Luego, invite a los estudiantes que les expliquen a otros las formas de jugar con la baraja y que jueguen una sola vez o una sola ronda para que sepan de que se trata cada juego. Además, explique las siguientes modalidades y permita que los estudiantes jueguen:

**Tute:** Consiste en sumar puntos, que se obtienen así, un “as” vale 11 puntos, las cartas numeradas con tres valen 10 puntos, la “sota” vale 2 puntos, el “caballo” vale 3 puntos y el “rey” vale 4 puntos. Las otras cartas no valen. Las reglas son: Cada uno de los equipos o jugadores se reparten de a 8 cartas y las otras cartas se dejan de mesa para tomarlas en cada jugada que se realiza y se deja una destapada que es la carta de la mesa. En el primer juego, inicia el equipo o jugador que se encuentra a mano derecha de la persona que repartió las ocho cartas a cada equipo o jugador. Este equipo muestra sobre la mesa una carta cuya intención es que gane las cartas de las demás. Luego cada uno de los equipos, lanza una carta, si es del mismo palo gana las cartas el que tiene el número mayor, si son de distinto palo gana las cartas el que lanzó la primera o el que lance una carta que tenga el mismo palo de la carta de la mesa. El ganador de cada tanda recoge las cartas para sí mismo. Siempre que se juega se toma una carta de las que quedaron sobrantes, los equipos tienen 8 cartas hasta que se acaben las cartas sobrantes de la mesa. Se obtienen más puntos si se tiene un caballo y un rey del mismo palo de la mesa; el equipo que las posee, tiene que decirlo a los demás y gana 40 puntos, y si tiene un caballo y un rey de otro palo son

20 puntos; a esta jugada se le conoce como ‘Acuse’; y si el equipo toma la carta final la de mesa gana 10 puntos más. El juego finaliza con la ‘ultima levantada’ de cartas que es el momento en que se hace la última jugada. El equipo que gana el juego es el que tiene más puntos o que forme 4 caballos y 4 reyes gana de inmediato el juego.

**Canasta rummy:** Se juega con dos barajas y los comodines o las cartas que tienen el joker. Se entregan 12 cartas a cada equipo. Se inicia colocando sobre la mesa 20 puntos sumados de distintas cartas, no importa el número de cartas, si no tiene, se toma cartas de las sobrantes. Cada equipo puede hacer las siguientes jugadas: Colocar mínimo tres cartas del mismo número o figura, colocar del mismo palo tres cartas cuyos números sean consecutivos (*esto se conoce como escalera*). Igualmente puede agregar cartas para continuar las escaleras o completar las cartas del mismo número o figura si es de uno de los palos que le falta; y, el comodín puede ser cualquier carta. Cada equipo puede hacer una o varias jugadas en el turno que le corresponda; en caso que no tenga jugadas debe tomar cartas hasta que pueda jugar. Gana el equipo que se quede sin cartas.

Cierre la sesión con las siguientes preguntas: *¿Es posible determinar cuál es la jugada que realizará uno de los equipos, por qué?, ¿cuáles son las jugadas que menos ocurren?, ¿cuáles son las jugadas que más ocurren?* Y como actividad para evaluar, los estudiantes pueden escribir algunas de las características que tienen los juegos de azar.

# ¿Qué situaciones puede estudiar un veterinario cuando se presenten enfermedades en el ganado?

## ! IDEAS CLAVE:

- La existencia de dos tipos de situaciones que se contraponen: Aquellos resultados que se pueden predecir con seguridad (*experimentos determinísticos*) y aquellos donde no es posible determinar un resultado dado (*experimentos aleatorios*).
- El espacio muestral como el conjunto de todos los eventos o sucesos posibles.
- Métodos como listados, diagramas de árbol y tablas de doble entrada.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Clasifico algunos fenómenos.
- Genero ejemplos de cada uno de los fenómenos.
- Justifico mis afirmaciones.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes clasifiquen algunas situaciones de azar y no azar.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- 1 pliego de papel periódico o craft.
- Revistas, periódicos o magazines.
- Tijeras.
- Cinta o colbón.

Solicite el material por grupo antes de la actividad.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice grupos de 4 estudiantes cada uno. Invite a los estudiantes a contestar las siguientes preguntas: *¿Cuáles palabras son las que más se utilizan para hablar de*

*azar?* y *¿cuáles actividades que los estudiantes hacen al día son las que consideran que pertenecen al azar?* Luego, cada uno de los grupos coloca las palabras y cinco actividades que asocian al azar en el papel periódico. Estas pueden ser *"chiripa", "suertudo", "de buenas", "de malas", "inesperado(a)", "factible"*, entre otras y que escriban actividades como personas con las que se van encontrar, que le va a gustar hoy, etc. Luego, cada uno de los grupos pega sus carteleras alrededor del salón y se observan. Oriente la observación con las siguientes preguntas: *¿Todo lo escrito cumple las condiciones dadas que se asocian al azar?, ¿cuáles no están*

de acuerdo con el azar?, ¿todo el azar se asocia a hechos positivos o existen hechos negativos, por qué?

Luego, del periódico o revistas recortan dos situaciones que no tienen relación con el azar y justifican por qué. De nuevo cada uno de los grupos expone los recortes y justifican las razones de su selección; simultáneamente usted en el tablero coloca las afirmaciones que se dan en términos

de: Siempre es posible saber cuánto es, qué tipos de actividades se van a realizar, el orden de aparición, la organización de la misma revista, u otras que considere pertinentes.

Para cerrar la actividad cada uno de los estudiantes escribe en su cuaderno las características que deben cumplir las actividades, situaciones o eventos que se relacionan con el azar y las que no.

## Actividad 2

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes establezcan algunas situaciones determinísticas y no determinísticas del problema del veterinario.

### Materiales:

- Fotocopia de la situación.
- Hojas de papel y lápiz.

### Desarrollo Propuesto:

Organice los mismos grupos de la actividad anterior. Ahora, invite a los estudiantes a establecer una situación o una pregunta que sea de azar y otra que no lo sea de la situación problema que orienta la secuencia:

Un veterinario debe determinar qué reses están enfermas de ántrax o de fiebre aftosa en una región del país. El veterinario decide realizar exámenes de sangre para cerciorarse de que las reses presentan alguna de las enfermedades y determinar el número de reses a sacrificar en el caso de tener fiebre aftosa o ántrax en etapas muy avanzadas, o aplicar algún tipo de antibiótico si el ántrax o la fiebre aftosa están en su etapa inicial. A pesar del examen, el veterinario tiene temor de tomar decisiones equivocadas porque sabe que algunas pruebas médicas o procedimientos de vigilancia generan falsos positivos y/o falsos negativos.

Cada uno de los grupos las comparte escribiéndolas en el tablero. Luego, invite a los estudiantes a verificar si las preguntas o situaciones sí cumplen con las condiciones a través de las siguientes preguntas: *¿Cuáles de esas situaciones o preguntas tienen varias respuestas o una gran cantidad de posibilidades? y ¿cuáles de las respuestas implican un solo dato o valor?* Recolecte evidencias de las respuestas de los estudiantes para tener ejemplos y expresiones de ellos, porque más adelante serán el sustento para reflexionar sobre las características de las situaciones que necesitan de su estudio la probabilidad.

Ahora, recomíenles clasificar las siguientes situaciones que requieren para su respuesta de conocer cuáles

son posibles pero no está seguro que ocurran (situaciones aleatorias) o las que requieren de algunos cálculos que con seguridad van a ocurrir (situaciones determinísticas) y así mismo que las resuelvan:

**Situación 1:** Si por cada día, el veterinario hace 10 exámenes de sangre, ¿cuántos exámenes haría en quince días?

**Situación 2:** Si tengo cuatro reses para determinar si están sanas o enfermas. ¿Cuáles son las posibilidades de que una de ellas esté enferma?

**Situación 3:** Si el veterinario cobra por cada examen \$45 000 y por día de trabajo \$100 000, ¿cuánto se le tiene que pagar por quince días de trabajo y un promedio de 20 exámenes por día?

**Situación 4:** Si se encontró que cinco reses están enfermas, ¿cuáles son las combinaciones que se pueden obtener con respecto a las que tienen ántrax o aftosa?

**Situación 5:** En el estudio que ha realizado en una semana se encontró que el 15% de las reses enfermas tienen ántrax y el 10% tienen aftosas. ¿Crees que se mantendrá esta tendencia?

Recolecte evidencias de los procedimientos que utilizan para tratar las situaciones aleatorias. Éstas son las situaciones 2, 4 y 5. Para cerrar la sesión, invite a los estudiantes a resolver las situaciones elaboradas por cada uno de los grupos.

## Segunda sesión

*El espacio muestral es el conjunto de todos los eventos o sucesos simples posibles de una situación y un suceso o evento es un resultado que no se puede desglosar en otros más simples. A todas las situaciones aleatorias se les puede determinar los resultados posibles.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes determinen todos los eventos o sucesos que conforman una situación aleatoria.

#### Materiales:

- 2 dados que se diferencien por alguna cualidad ya sea el color o el tamaño.
- 4 monedas de diferente nominación.
- Una baraja española.
- Hojas de papel y lápiz.

Solicite el material a cada uno de los grupos.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice los mismos grupos de la sesión anterior. Cada grupo debe establecer todas las posibles respuestas cuando lanza un dado y cuando lanza dos dados. Recolecte evidencias de la forma como organizan la información cuando son lanzados dos dados; es posible que los estudiantes organicen tablas, listados o diagramas de árbol. En caso que los estudiantes no lo manifiesten, explíquelos:

De listados	De tablas	Diagramas de árbol																																																								
<p>(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),                      (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),                      (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),                      (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),                      (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),                      (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).</p> <p>Se utiliza la diferencia de color para indicarle que son las opciones al lanzar dos dados distintos.</p>	<p>Es importante mostrar una diferencia en los datos:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Dado 1</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>Dado 2</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>1</th> <td>11</td> <td>21</td> <td>31</td> <td>41</td> <td>51</td> <td>61</td> </tr> <tr> <th>2</th> <td>12</td> <td>22</td> <td>32</td> <td>42</td> <td>52</td> <td>62</td> </tr> <tr> <th>3</th> <td>13</td> <td>23</td> <td>33</td> <td>43</td> <td>53</td> <td>63</td> </tr> <tr> <th>4</th> <td>14</td> <td>24</td> <td>34</td> <td>44</td> <td>54</td> <td>64</td> </tr> <tr> <th>5</th> <td>15</td> <td>25</td> <td>35</td> <td>45</td> <td>55</td> <td>65</td> </tr> <tr> <th>6</th> <td>16</td> <td>26</td> <td>36</td> <td>46</td> <td>56</td> <td>66</td> </tr> </tbody> </table> <p>Se organizan los datos de cada celda de tal forma que el primer dato corresponda a la columna y el segundo a la fila.</p>	Dado 1	1	2	3	4	5	6	Dado 2							1	11	21	31	41	51	61	2	12	22	32	42	52	62	3	13	23	33	43	53	63	4	14	24	34	44	54	64	5	15	25	35	45	55	65	6	16	26	36	46	56	66	 <p>De cada uno de los números salen ramilletes.</p>
Dado 1	1	2	3	4	5	6																																																				
Dado 2																																																										
1	11	21	31	41	51	61																																																				
2	12	22	32	42	52	62																																																				
3	13	23	33	43	53	63																																																				
4	14	24	34	44	54	64																																																				
5	15	25	35	45	55	65																																																				
6	16	26	36	46	56	66																																																				

Ahora, invite a los estudiantes que muestren los espacios muestrales de lanzar 2, 3 o 4 monedas con la técnica de diagrama de árbol y que determinen el listado. Verifique que las respuestas de los estudiantes tienen las siguientes cantidades de agrupaciones distintas: Para dos monedas son cuatro posibilidades, para tres monedas son ocho posibilidades y para cuatro monedas son 16 posibilidades.

Declare que en todos los casos cuando se determinan todos los resultados posibles de una situación aleatoria se denomina **espacio muestral**. Ahora invite a los estudiantes a establecer el espacio muestral de las cartas de la baraja española de 40 cartas si se lanza una carta a la vez. En este caso serían 40 posibilidades. ¿Qué sucede si son dos barajas? Por cada una son 40 posibles, en total serían 1 600 posibilidades.

Para evaluar, proponga las siguientes situaciones:

**Situación 1.** Clasifique los siguientes enunciados con la letra A para indicar que son situaciones aleatorias y con la letra N para indicar que no son situaciones aleatorias:

1. Si hoy llueve.
2. La velocidad de un automóvil.
3. El número de nacimientos de un país en un año.
4. El número de estudiantes de un curso.
5. La duración de un día en horas.
6. La cantidad de pastillas que consume un enfermo.

**Situación 2.** Si se tiene un dado de 12 caras con las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L y un dado de 6 caras del 1, 2, 3, 4, 5, 6. ¿Cuáles y cuántas parejas son posibles formar? Finalmente, invite a los estudiantes a dar respuesta a la pregunta de la semana y cómo el desarrollo de las actividades le permite dar respuesta a la pregunta de la secuencia.

# ¿Qué probabilidad tiene una res para ser salvada?

## ! IDEAS CLAVE:

- La relación de la probabilidad con la combinatoria.
- La frecuencia relativa como indicador de la probabilidad de un suceso.
- La probabilidad como razón o cociente.
- La probabilidad subjetiva como valores estimados.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Utilizo las frecuencias para contar resultados.
- Determino una conjetura para predecir los resultados.
- Genero procedimientos propios para calcular la probabilidad.
- Comunico mis conclusiones.

## Primera sesión

*Las interpretaciones de la probabilidad funcionan en términos de lo **objetivo** o lo **subjetivo**. El punto de vista subjetivo se relaciona con el grado de confianza o creencia de ocurrencia de un acontecimiento que tienen las personas o la confianza que se relaciona con la frecuencia relativa de ocurrencia de los sucesos y su tendencia estabilizarse con números grandes. Y el punto de vista objetivo dado como una definición matemática que relaciona la razón entre el suceso y el total de los sucesos que se determinan en total.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes conceptualicen el método de la probabilidad basada en la frecuencia relativa.

#### Materiales:

- 4 monedas de diferente nominación.
- Hojas de papel y lápiz.

Solicite el material a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice parejas de estudiantes. Cada pareja lanza una moneda 20 veces y se registran la cantidad de veces que ocurre un suceso o evento con respecto a la totalidad de lanzamientos, en la siguiente tabla:

Suceso o evento	Conteo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Cara			
Sello			
<b>TOTAL</b>		20	$\frac{20}{20}$

Organice una puesta en común de los resultados; es de esperar que todos sean distintos y cercanos al valor  $\frac{1}{2}$ . Exíjales a los estudiantes que expresen la frecuencia como un fraccionario irreductible, es decir, que el numerador como el denominador no tienen múltiplos en común. De nuevo, solicíteles que llenen la tabla y que lancen la moneda 100 veces; esta vez tienen que observar si la ocurrencia de cada suceso va ser mayor o menor a la ocurrencia de cada evento encontrada cuando lanzamos 20 veces. Permita que los estudiantes compartan algunas respuestas e indague el por qué de las soluciones planteadas por los estudiantes y recolecte evidencias sobre estos argumentos para que reflexione sobre los errores conceptuales que presentan; si el estudiante expresa ideas relacionadas con “es más porque son más veces”, él está analizando cada suceso aparte, alejado de los resultados del espacio muestral, por lo tanto, es necesario que trate al estudiante para que reconozca los dos sucesos al tiempo y enfatice que se está estableciendo una razón o una comparación de los resultados de ese evento con respecto a todos los resultados del ensayo. Habrá otros estudiantes que tendrán claro la frecuencia relativa como una razón pero enfatizarán en comparar los fraccionarios de las frecuencias relativas argumentando que es mayor porque el denominador es mayor; en este caso, el estudiante tiene dificultades con las relaciones de orden con los números racionales positivos, por tal razón, se requiere que retome el mejor contexto de significado (parte - todo, medidor, operador, punto en la recta, cociente, entre otros) que maneje el estudiante para que pueda discriminar con esta representación cuál es mayor.

Luego, de la experiencia cada una de las parejas tienen que comparar sus datos cuando era 20 veces y 100 veces. *¿Hubo cambios?* Lo más seguro es que sí, y la respuesta es más cercana al valor  $\frac{1}{2}$ ; por lo cual deben comparar sus resultados con la respuesta a la siguiente pregunta: *¿Si la ocurrencia de cada suceso, va ser mayor o menor comparada con lo que se registró cuando se lanzó 20 veces la moneda?* Discuta con los estudiantes: *¿Cuál dato de la tabla permite valorar la ocurrencia de que salga cara (un lado de la moneda)?, ¿cuál dato de la tabla permite valorar la ocurrencia de*

*que salga sello (otro lado de la moneda)?* Los estudiantes van a tender a valorar los datos de la frecuencia absoluta. Ahora realice la pregunta, *¿Cuál es el dato que me permite reconocer la tendencia de una ocurrencia de cara o sello, sin importar el número de veces que se lance la moneda?*, en ese caso, los estudiantes analizan y comparan las frecuencias relativas que tienden al mismo valor.

Con esta información, presente las siguientes explicaciones: La probabilidad de ocurrencia es una comparación entre el suceso que se estudia y el número de sucesos que genera la situación aleatoria. Uno de los métodos para determinar la probabilidad es por **aproximación de la frecuencia relativa o experimento de Quetelet**, que consiste en realizar el experimento una y otra vez en la realidad, cuando aumenta este número en grandes cantidades, las frecuencias relativas de cada uno de los eventos se aproximan a tener el mismo valor entre ellas y este se conoce como probabilidad de éxito de ocurrencia de ese evento. Con base en estos resultados, por eventos reales,  $P(A)$  se estima de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\text{número de veces que ocurre } A}{\text{número de veces que se repitió el experimento}}$$

*Es importante que establezca una notación de probabilidades; se sugiere la letra P para representar la probabilidad, las letras A, B, C, las del alfabeto menos la P que denoten sucesos o eventos específicos; y P(A) que denote la probabilidad de que ocurra el suceso A.*

Ahora, cuestione: *¿Si lanzamos 200 veces la moneda, cuáles son las probabilidades de que nos salga los mismos valores que se obtuvieron al lanzar 100 veces para cada suceso (cara o sello)?* Se espera que los estudiantes mencionen que se acerca de nuevo a  $\frac{1}{2}$  para cada suceso y la probabilidad de que sea los mismos valores de 100 y 200 lanzamientos es cercana a 1. Luego, invite a los estudiantes que lo realicen de nuevo, pero no les permita que adicione 100 lanzamientos más al resultado de la tabla anterior porque se están alterando las condiciones del experimento y lo que se quiere es tomar 200 datos nuevos.

Ahora, organice a los estudiantes en tres grupos. Cada uno va a estudiar una situación aleatoria. El grupo 1 va a estudiar las posibilidades de ocurrencia de cada uno de los eventos al lanzar dos monedas. El grupo 2 estudiará las posibilidades de ocurrencia de cada uno de los eventos al lanzar tres monedas; y el grupo 3 va a estudiar las posibilidades

de ocurrencia de cada uno de los eventos al lanzar cuatro monedas. Cada uno de los grupos debe decidir cuántas veces debe realizar el experimento, si una, dos o tres veces para determinar a qué valor tiende la probabilidad de cada evento o suceso. Este es un momento adecuado de cierre de esta sesión.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes conceptualicen los métodos del cociente y de la subjetividad para hallar la probabilidad.

#### Materiales:

- Baraja española.
- Hojas de papel y lápiz.

Se solicita el material a cada uno de los grupos.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan grupos de 4 personas. Permítales jugar con las cartas el juego del Tute (se le sugiere leer la descripción de este juego en la semana 1) y que escriban la respuesta a: *¿Cuál es la probabilidad de que salgan las cartas que dan puntos?* Antes de jugar indíqueles que escriban la probabilidad en la forma  $\frac{a}{b}$ . Al interior de los grupos se acuerdan dos equipos; hacen sus respectivos juegos y, paralelamente, cada equipo anota cuando le salen las cartas que dan puntos. Luego, realizan este procedimiento dos veces más; finalmente, cada uno de los equipos registra la información en la siguiente tabla:

Datos Numéricos	Probabilidad (Antes de jugar)	Frecuencia relativa (Después de jugar)
Número de juegos		
Primera		
Segunda		
Tercera		

Recolecte evidencias de que la probabilidad se va acercando cada vez a los resultados de la frecuencia relativa y esta es igual al dato si son 40 cartas ó si son 48 cartas. Organice una puesta en común orientándola con la pregunta: *¿Sus probabilidades se acercaron al valor de la frecuencia relativa de sacar cartas que dan los puntos en el juego del tute?* Indíqueles que la estimación a la probabilidad de que salgan las cartas que generan puntos cada vez se van aproximando a lo real y cuando hacen estas estimaciones aplican un método que se denomina **probabilidad subjetiva o a priori**.

*La probabilidad de ocurrencia de un suceso A, P (A) se obtiene de antemano, por suposición o estimación y sin necesidad de hacer el experimento; su valor se da con base en el conocimiento de las circunstancias relevantes que tiene cada una de las personas.*

Continuando, pregunte: *¿En qué momento es posible tomar la probabilidad como frecuencia absoluta?* En ese caso, los estudiantes deben recordar que la frecuencia absoluta no sirve para determinar la probabilidad; realmente, la frecuencia relativa se considera una probabilidad cuando se realiza la experiencia una gran cantidad de veces, ya que se reconoce una aproximación a un valor único y que es conocido como la probabilidad real. Así mismo aclare que este método es conocido como la **Ley de los Grandes Números** que indica que los estimados por frecuencias relativas tienden a mejorar si se hacen más observaciones.

## SEMANA 3

Otro cuestionamiento: ¿Cuál sería una forma de calcular la probabilidad que no dependa de los resultados de experimentos, ni de los estimados que construyen la experiencia de una persona? De un tiempo prudente para que los grupos piensen la respuesta y luego que compartan sus formas de probabilidad. Recolecte evidencias de estas formas de cálculo que tienen que relacionarse con determinar el cociente. Así mismo, declare que la forma clásica se conoce como probabilidad objetiva y la forma de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso es:

Aclare que esta forma de calcular la probabilidad es válida si cada uno de los sucesos tiene la misma probabilidad de ocurrencia. Coloque ejemplos como las cartas, donde cada suceso o evento tiene la probabilidad de ser seleccionado 1 de 40 o 1 de 48 (el denominador depende del número de cartas). Con el lanzamiento de la moneda, se tiene una probabilidad de 1 a 2 de obtener cara o sello, mientras en el suceso de obtener un número cuando se lanza un dado, se tiene la probabilidad de ocurrencia igual a 1 de 6.

Para cerrar la sesión y evaluar, coloque la pregunta que orienta la semana, con los siguientes datos:

Después de tres semanas, el veterinario realizó los siguientes registros de los diagnósticos que ha dado la búsqueda de reses enfermas y sanas en la región:

Semana 1			Semana 2			Semana 3		
Estado de salud reses	Enfermas	Sanas	Estado de salud reses	Enfermas	Sanas	Estado de salud reses	Enfermas	Sanas
Días de la semana			Días de la semana			Días de la semana		
Lunes	13	13	Lunes	13	13	Lunes	45	45
Martes	14	16	Martes	24	26	Martes	54	56
Miércoles	20	24	Miércoles	30	34	Miércoles	30	24
Jueves	4	16	Jueves	5	25	Jueves	4	16
Viernes	5	14	Viernes	7	20	Viernes	5	14

1. ¿Cuál es la probabilidad que tiene una res para ser salvada el día lunes?
2. ¿Cuál es la probabilidad que tiene una res para ser salvada el día martes?
3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene una res para ser salvada los días que faltan de la semana ?
4. ¿Cuál es la probabilidad de salvar las reses de cada una de las semanas registradas?
5. ¿Cuál es el método que conviene para calcular la probabilidad?

Cuando revise las producciones de los estudiantes, identifique que para las preguntas del 1 al 3, el denominador es el resultado de sumar el número de reses sanas con el número de reses enfermas de cada día. En cambio, para la

pregunta 4, el denominador es el total de reses sanas y de reses enfermas de cada semana. Con respecto a la pregunta 5, lo que conviene es el método clásico para determinar el dato de probabilidad para esa población en particular.

# ¿Cuáles números representan la probabilidad de un resultado falso ?

## ! IDEAS CLAVE:

- Representaciones numéricas ( $\frac{a}{b}$ , decimal y porcentaje) para definir la probabilidad.
- La escala 0 a 1 define categorías de ocurrencia de un evento.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Asocio la escala numérica con la escala cualitativa.
- Genero conjeturas sobre la probabilidad de un suceso.
- Calculo probabilidades de eventos.

### Primera sesión

*Los acontecimientos aleatorios cuya posibilidad de ocurrencia está en un punto entre lo seguro y lo imposible, inicialmente se estima de forma aproximada con enunciados verbales como: casi, nunca, usualmente, raro, escaso, común, casi siempre, entre otros. Luego, esos enunciados se trasladan a aproximaciones para que le correspondan un intervalo o un valor numérico entre 0 y 1 determinando la escala..*

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes identifiquen la escala que se asocia a los valores de la probabilidad.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.
- Cinta de enmascarar.

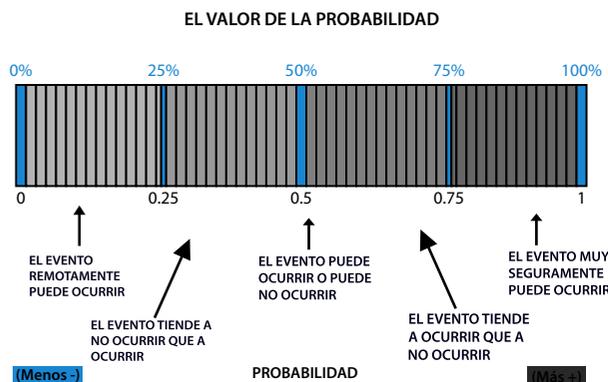
Solicite el material a cada uno de los grupos.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan grupos de cinco estudiantes. Cada uno de los grupos clasifica las siguientes palabras de acuerdo al grado de confianza que generan cuando va a suceder algo. Sugierales que clasifiquen en tres grandes grupos así: Uno que es seguro que suceda, otro que no es posible que suceda y el último del cual no es posible dar una determinación si o no sucede.

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Es cierto.</li> <li>• Es seguro.</li> <li>• Es posible.</li> <li>• Bastante probable.</li> <li>• Es igual de probable.</li> <li>• No es posible.</li> <li>• Es inverosímil.</li> <li>• Es improbable.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Hay alguna posibilidad.</li> <li>• Es imposible.</li> <li>• Casi imposible.</li> <li>• Es incierto.</li> <li>• Puede ser.</li> <li>• Sin duda.</li> <li>• Es verosímil.</li> <li>• Duda.</li> </ul> |
|---|--|

Cada uno de los grupos expone sus organizaciones. Invite a los estudiantes a hacer preguntas indagando sobre la ubicación de alguna palabra. Luego, cada uno de los grupos va a escribir frases donde utilicen todas esas palabras asociadas a un acontecimiento o situación aleatoria. Exhorte a que cada grupo mencione qué acontecimiento seleccionó y oriente la discusión con las siguientes preguntas: *¿Esa situación es aleatoria?, ¿es posible determinar un valor numérico para cada palabra?, ¿cuáles valores se darían a los eventos imposibles que sucedan? y ¿cuáles valores se darían a los eventos seguros que sucedan?* Recolecte evidencias de las afirmaciones de los estudiantes para determinar los valores que colocarían. Es posible que nombren expresiones con porcentajes o con números que fijan un inicio y un final para determinar alguna escala. En ese caso, utilice estas afirmaciones para declarar que la escala numérica que utilizamos en probabilidad va desde el cero para indicar que no va suceder y el uno para indicar con certeza absoluta que va suceder y que corresponde a la escala 0% y 100% respectivamente. Realice el correspondiente dibujo en el tablero:



Ahora, invite a los grupos a colocar las palabras clasificadas que van de acuerdo al dato numérico; por ejemplo, si el evento es seguro o casi seguro que va a suceder se asocia a valores muy cercanos a 1. Simultáneamente, recolecte evidencias al respecto de las preguntas y las decisiones de los grupos para resolverla. Las decisiones de los estudiantes están dadas de los significados que manejan de las palabras, que a su vez se asocian al grado de confianza.

Coloque las siguientes situaciones para que calculen la probabilidad:

**Situación 1:** ¿Cuál es la probabilidad para que se aumente un día más a la semana?

**Situación 2:** Si se realiza una encuesta sobre los horarios del noticiero de los canales nacionales y se le preguntó a 50 personas, de las cuáles 12 contestaron estar de acuerdo; luego, una firma realizó otra encuesta seleccionando al azar 1 000 000 personas y encontró que 234 056 estaban de acuerdo con el horario. ¿Cuál es la probabilidad de conformidad con los horarios del noticiero de los canales nacionales?

**Situación 3:** Un experimento consiste en lanzar una tachuela. Se registra las veces que cae de punta hacia arriba, obteniendo 15 de 30 lanzamientos, 25 de 40 lanzamientos, 23 de 100 lanzamientos, 34 de 50 lanzamientos, 21 de 100 lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que al caer la tachuela ésta quede con la punta hacia arriba?

**Situación 4:** ¿Cuál es la probabilidad de que tres terneros de una vaca sean machos?

**Situación 5:** ¿Cuál es la probabilidad de que mañana se tenga clase de matemáticas?

Para cerrar la sesión, invite a los estudiantes a que compartan los procedimientos que realizaron y que indiquen qué método emplearon para hallar la probabilidad. Además que clasifiquen las situaciones de acuerdo a la escala de probabilidad.

## Segunda sesión

La mayoría de la información que se presenta utiliza el porcentaje. Nos es familiar expresiones como “hay un 70% de posibilidad de éxito en una cirugía”, “tengo muchas probabilidades de que aprueben el préstamo”; cualquier enunciado semejante a los anteriores da información sobre las posibilidades de ocurrencia de un evento pero nunca da la certeza absoluta de que el evento ocurra. Todas estas informaciones se basan en análisis de datos aportados por estudios o experiencias previas que no determinan la certeza del hecho, pero sí orientan, en algunos casos, las tendencias. Es importante evitar enunciados o decisiones que se relacionan con la ocurrencia de un caso o el acuerdo general ya que cada uno actúa en la mayoría de los casos de forma independiente. Por ejemplo, enunciar que ninguno de los estudiantes sabe sumar con números enteros porque un estudiante no pudo resolver una suma; o, viceversa, mencionar que todos los estudiantes saben sumar enteros y no analizar el caso particular de verificación de que cada estudiante sabe sumar.

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes representen, de distintas formas, la probabilidad de algunos eventos asociados a situaciones de juegos de azar.

#### Materiales:

- 2 dados.
- Una baraja española.
- Una calculadora.
- 4 monedas.

Solicite el material a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan grupos de tres estudiantes. Indíqueles que usen el material para determinar la cantidad de eventos o sucesos que se les pide junto con la probabilidad de ocurrencia de los mismos, y que la representen de la forma . Las situaciones son las siguientes:

#### Con dados

**Situación 1.** De un dado enumerado de 1 a 6, determinen los eventos o sucesos que se nombran cuando se lanza el dado y cae:

- Números pares.
- Números impares.
- Números mayores o iguales que 3.
- Números menores que 5.
- Tres
- Uno.

De cada evento determine la probabilidad de la forma  $\frac{a}{b}$ . Expresen la probabilidad como número decimal y porcentaje. Ayúdense de la calculadora.

Paralelamente, recolecte evidencias de que los eventos analizados por los estudiantes si están cumpliendo con la condición pedida y que ellos están estableciendo la razón

matemática para determinar la probabilidad. Permita que los estudiantes, de un grupo a otro, se compartan los cuadernos para verificar que los cálculos están bien hechos. Oriéntelos con las preguntas: *¿Todos deben tener la misma probabilidad?, ¿desde que método se tiene que sacar la probabilidad, por qué?, ¿es posible tener una probabilidad mayor a 1?* Las respuestas le indican que los estudiantes reconocen las relaciones de comparar la cantidad de eventos que cumplen la condición con respecto al total de sucesos que se obtienen de la situación aleatoria. Además, saben aplicar el método de la probabilidad objetiva o clásica debido a las condiciones de la situación, mientras los valores numéricos de la probabilidad corresponden a decimales y a porcentaje mayores a 0 y menores a 1 (Simbólicamente  $0 \leq P(A) \leq 1$ ), ya que es el valor máximo otorgado a la confianza de ocurrir un hecho.

Luego, organice una puesta en común para tratar las diferentes representaciones numéricas de las probabilidades. Se sugiere que tome el caso de que caiga un número igual o mayor a 3. Los eventos que cumplen esta condición son: 3, 4, 5 y 6 en el dado; entonces la probabilidad en forma fraccionaria es  $\frac{4}{6}$  y su correspondiente expresión decimal es 0,666666666... Cuando se tengan expresiones de esta forma es necesario referirse al redondeo a tres cifras decimales, quedando 0,667, que más adelante apoya el proceso de significancia que se da en la estadística inferencial.

*Todos los dígitos en un número son significativos, pero es necesario realizar el redondeo para determinar con claridad la probabilidad. El desarrollo de la probabilidad permite la comprensión de la estadística inferencial que motiva, a partir de probabilidades y datos estadísticos, que los estudiantes puedan tomar decisiones e inferir el comportamiento de los datos de un fenómeno real.*

Así mismo, recuerde a los estudiantes que, al multiplicar por 100, el decimal que representa la probabilidad

(0,667 en el ejemplo anterior), se torna en la representación en porcentaje de la probabilidad. En el caso del ejemplo es 66,7%.

Ahora, organice 3 grupos. Cada uno de los grupos da la predicción a la siguiente pregunta: *¿El espacio muestral se divide cuando se establecen eventos que cumplen una condición, por qué?*, cada uno de los grupos debe establecer una respuesta como grupo y asígnele una de las siguientes situaciones para que la realicen:

### Situación 1:

Se lanzan dos dados, cada uno enumerado del 1 al 6. Determinen la probabilidad de los eventos o sucesos que se nombran a continuación:

- Que la suma de sus valores dé un número par.
- Que la suma de sus valores dé un número impar
- Que la suma dé 1.
- Que la suma dé 12.
- Que la suma dé 10.
- Que el resultado de su suma sea mayor a 6.
- Que el resultado de su suma sea menor a 3.

Expresen cada probabilidad de las tres formas:

Decimal, fraccionaria o porcentaje.

### Situación 2:

Se lanzan cuatro monedas de diferente valor. Determinen la probabilidad de los eventos que se nombran a continuación:

- Que todas las monedas caigan en cara.
- Que todas las monedas caigan en sello.
- Que una sea cara.
- Que dos sean caras.
- Que dos sean sellos.
- Que tres sean caras.
- Que tres sean sellos.

Expresen cada probabilidad de las tres formas: Decimal, fraccionaria o porcentaje.

### Situación 3:

Determinen la probabilidad de que salga una de las siguientes cartas de una sola baraja:

- Ases.
- Reyes.
- Oros.
- Bastos
- Copas.
- Espadas.
- Salga el número 2.

Expresen cada probabilidad de las tres formas: Decimal, fraccionaria o porcentaje.

Luego, cada uno de los grupos expone a los otros la forma de resolver cada uno de las situaciones e indíqueles que den respuesta a la pregunta anterior: *¿El espacio muestral se divide cuando se establece eventos que cumplen una condición?* En este caso, la respuesta de los estudiantes debe ser en que se divide en dos grupos, uno formado con los eventos que cumplen con la condición y otro con los eventos que no cumplen la condición. Por ejemplo, los complementos de los sucesos de números pares son los números impares en los dados. Con lo anterior, pregunte, *¿cómo son las probabilidades de estos dos eventos?* Se tienen que validar las respuestas de los estudiantes con expresiones que

se relacionan a que las probabilidades son complementarias y que al sumarse deben dar 1. Una manera de simbolizarse este hecho es:

$$P(A) + P(A') = 1 \text{ donde } A \text{ y } A' \text{ es el espacio muestral}$$

Invite a los estudiantes que de cada evento estudiado escriban el evento complementario y que determinen la probabilidad de este evento.

Finalmente para cerrar el desarrollo de las actividades de la semana, cada uno de los grupos contesta la pregunta de la semana y establecen cómo las actividades desarrolladas contribuyen a resolver la situación problema.

*A partir de los desempeños propuestos en las semanas 1, 2, 3, 4 y las evidencias de las actividades desarrolladas, analice tanto la información para determinar el alcance de los aprendizajes que han tenido los estudiantes, así como las dificultades y diseñe las estrategias que permitan promover el mejoramiento.*

# ¿Cuál es la probabilidad de que la res tenga las dos enfermedades?

## ! IDEAS CLAVE:

- La regla de la suma como método para calcular la probabilidad de ocurrencia de varios eventos a la vez.
- Clasificación de los eventos.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Ejercito la regla de la suma para calcular la probabilidad.
- Justifico las características de las situaciones para aplicar la regla de la suma.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes calculen probabilidades de eventos que pueden ocurrir de forma compatible.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Fotocopia de la situación 1.

#### Desarrollo Propuesto:

Presente la situación que orienta la secuencia de la siguiente manera:

**Situación 1:** El veterinario realiza ensayos clínicos de los exámenes de 99 reses y los registra en las siguientes tablas:

RESULTADOS DE EXAMENES DE SANGRE ANTRAX

	Resultado positivo	Resultado negativo
La res está enferma	50	35
La res no está enferma	10	4

RESULTADOS DE EXAMENES DE SANGRE FIEBRE AFTOSA

	Resultados positivo	Resultado negativo
La res está enferma	60	25
La res no está enferma	7	7

Se selecciona una al azar:

1. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a una res que esté enferma de ántrax o que tuvo un resultado positivo?
2. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a una res que esté enferma de fiebre aftosa o que tuvo un resultado positivo?
3. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una res enferma de Ántrax o de Aftosa?
4. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una res sana o enferma de Ántrax?

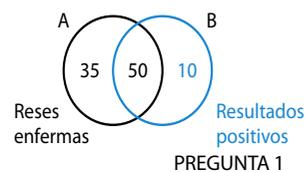
Permita que los estudiantes realicen las preguntas y anote las respuestas en el tablero. Es importante que se aclaren los términos de las columnas y las filas de cada tabla (revise la información dada en la primera semana de cada uno de los términos). Seleccione las preguntas que se refieren a la manera en que interactúan dos eventos o realice las siguientes preguntas: *¿Cuántas reses están enfermas de Antrax, realmente?* Respuesta:  $30 + 55 = 85$ . *¿Cuántas reses están enfermas de fiebre aftosa?* Respuesta:  $60 + 25 = 85$ . *¿Cuántos exámenes indicaron que el resultado era positivo tanto para el ántrax como la fiebre aftosa?* Respuesta: Para el ántrax  $50 + 10 = 60$  y para la fiebre aftosa  $60 + 7 = 67$ . Y *¿Cuánto exámenes indicaron que el resultado era negativo para cada enfermedad?* Para el ántrax  $35 + 4 = 39$  y para la fiebre aftosa  $25 + 7 = 32$ .

Organice parejas y que resuelvan las preguntas dadas en la situación. Paralelamente, recolecte evidencias que muestren si los estudiantes analizan los eventos por separado o de forma integrada. Cuando revise el valor de la probabilidad, fíjese que no estén contando dos veces la misma población; puede presentarse que los estudiantes tomen los totales de cada evento, por ejemplo, con los resultados de los exámenes del ántrax, entonces cuentan  $60 + 85$  y luego establecen la probabilidad como  $P(A) = \frac{145}{99}$ . En ese caso trate el error desde la definición de la probabilidad, máximo es 1, e indíqueles que revisen que no estén contando dos veces el mismo dato.

*Las probabilidades que incluyen dos o más eventos, requiere que se analice si estos eventos son **excluyentes**, es decir, cuando uno de los eventos ocurre, ninguno de los otros puede ocurrir al mismo tiempo. O puede darse el caso que sean **compatibles** o que no son mutuamente excluyentes; es decir, cuando uno de los eventos ocurre, alguno de los otros puede ocurrir al mismo tiempo. Una de las formas de tratar en la escuela este tipo de probabilidades para eventos compuestos es introducir primero teoría de conjuntos, las operaciones de unión, intersección y complemento. Lo que las investigacio-*

*nes han encontrado es que el aprendizaje de estos fenómenos ha quedado simplemente en elaborar sombreados en diagramas de Venn, solo conjuntos o sólo representaciones, y no se ayuda a favorecer en los estudiantes a comprender la relación de estas operaciones conjuntas con las situaciones problema aleatorias; por eso, la invitación didáctica consiste en establecer, desde los contextos, estos eventos y operaciones conjuntas y no de forma aislada.*

Organice una mesa redonda. Realice la pregunta: *¿Cómo se relacionan los eventos a los que se le solicita la probabilidad?* Para ello, inicie con los eventos de la pregunta 1: Reses enfermas de ántrax y los resultados positivos. Permita que los estudiantes lleguen a concluir que son eventos que comparten 50 reses; por lo tanto, realice una representación de Diagrama de Venn para ayudar a visualizar las cantidades registradas en la tabla y usted pueda establecer algunas notaciones que se utilizan de la probabilidad en estos casos:



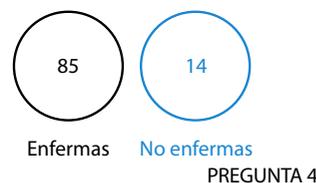
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{85}{99} + \frac{60}{99} - \frac{50}{99}$$

$$P(A \cup B) = \frac{95}{99} = 0,960 = 96\%$$

De forma similar trate las preguntas 2 y 3.

Aclare que al presentarse sucesos compartidos, este hecho se conoce como sucesos compatibles y en el caso contrario se conocen como *sucesos excluyentes*, como sucede en la pregunta 4:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{85}{99} + \frac{14}{99}$$

$$P(A \cup B) = \frac{99}{99} = 1 = 100\%$$

Este es un momento para evaluar realizando las siguientes preguntas:

**Situación 2:** Determine si los siguientes sucesos son compatibles o excluyentes:

1. Seleccionar aleatoriamente a un cirujano cardiaco y a un médico de sexo masculino.
2. Seleccionar aleatoriamente a un estudiante universitario que conduzca motocicleta o carro.

Este es un momento adecuado de cierre de la sesión.

## Segunda sesión

*La probabilidad requiere de procesos de contraste y reflexión entre la experiencia y los datos previos, con claras aplicaciones al mundo real; de esta manera estudiar un suceso mediante los procedimientos de la probabilidad permite la realización de experiencias directas cuyo análisis puede introducir al alumno en el proceso de modelización matemática de una situación y en la constatación de cómo ese modelo puede ser aplicado posteriormente en otras situaciones contextualizadas.*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes practiquen la regla de la suma para calcular la probabilidad de eventos compuestos.

#### Materiales:

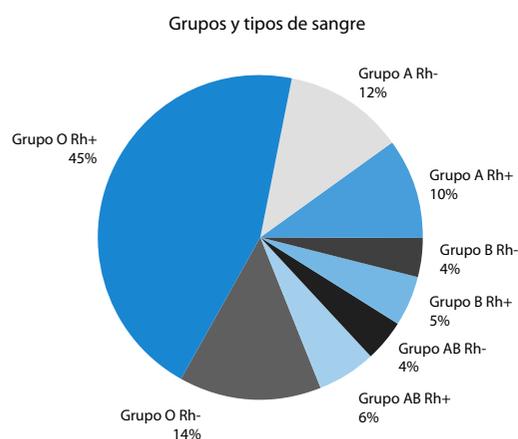
- Fotocopia de situaciones.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan tres grupos. Cada grupo realiza la solución de la situación que usted le asigne. Estas son:

#### Situación 1:

La siguiente gráfica presenta los resultados de sangre de 1 000 personas que obtuvieron en un laboratorio durante un mes de trabajo:



1. Se selecciona una persona al azar. Calculen:
  - La probabilidad de que sea del grupo B.
  - La probabilidad de que no sea de sangre grupo A.
  - La probabilidad de que sea del grupo A o de tipo Rh-
  - La probabilidad de que sea grupo A o grupo B.
  - La probabilidad de que no sea de tipo Rh-
  - La probabilidad de que sea del grupo AB o tipo Rh+
  - La probabilidad de que sea del grupo O o del grupo AB
  - La probabilidad de que sea de tipo Rh- o tipo Rh+
2. Si existe una emergencia, ¿Qué grupo de sangre y que tipo de Rh se requiere tener en reserva?

**Situación 2:**

La tabla muestra edades y sexo de 1 200 sicólogos entrevistados en Colombia.

Tabla 2.1 Distribución de la muestra encuestada según sexo y rango de edad						
Distribución encuestados		Rango de edad %				
		20 a 25 años	26 a 30 años	31 a 35 años	36 a 45 años	Más de 46
Sexo %	Mujer	81,6	82,7	76,4	76,2	68,5
	Hombre	18,4	17,3	23,6	23,8	31,5
Total		13	36	24	18	9

(tomado de: [http://www.colpsic.org.co/documentos/condiciones\\_del\\_psicologo.pdf](http://www.colpsic.org.co/documentos/condiciones_del_psicologo.pdf))

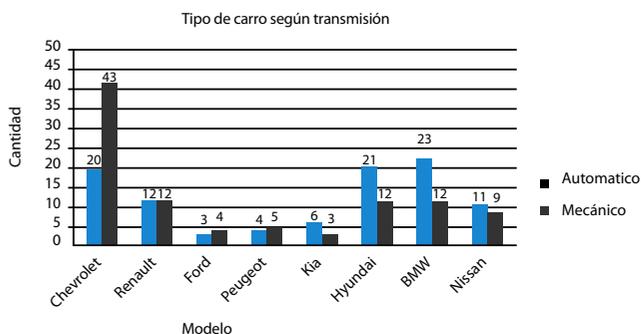
Se selecciona un sicólogo al azar. Calculen:

- La probabilidad de que sea mujer.
- La probabilidad de que sea hombre.
- La probabilidad de que sea mujer y que tiene una edad entre los 31 a 35 años.
- La probabilidad de que sea hombre o que tenga una edad mayor a 46 años.
- La probabilidad de que no sea hombre o no sea menor a 31 años.
- La probabilidad de que sea hombre o mujer.
- La probabilidad de que sea mayor de 25 años o menor a 36 años.
- La probabilidad de que sea menor o igual a 30 años o mayor a 46 años.

2. ¿Cuántas mujeres psicólogas se tendrían si se mantiene la tendencia presente en el estudio para 3 000 personas?

**Situación 3:**

En un concesionario se tiene la estadística de 200 carros que se vendieron en el trimestre:



1. Si uno selecciona un carro al azar, calculen:

- La probabilidad que sea Chevrolet.
  - La probabilidad que sea Renault o Ford.
  - La probabilidad que sea Hyundai o BMW.
  - La probabilidad que no sea Nissan o no sea Peugeot.
  - La probabilidad que no sea Kia o que sea Chevrolet.
  - La probabilidad que sea de transmisión mecánica o Hyundai.
  - La probabilidad que sea de transmisión automática o que no sea Ford.
  - La probabilidad que sea BMW o que tenga transmisión mecánica.
2. Se quiere retirar una de las marcas de carros, ¿cuál recomendarían?

Cada uno de los grupos elabora una cartelera que muestre los procedimientos y las relaciones que presentan los eventos indicados. Cada uno la colocan en un lugar visible y los otros compañeros las observan y elaboran preguntas para solicitar aclaraciones. Cada uno de los grupos realiza las aclaraciones que se les solicitan.

Como cierre, es necesario retomar la pregunta de la semana y qué los estudiantes determinen las características que deben cumplir las situaciones aleatorias para determinar probabilidades de eventos compuestos. Recolecte evidencias de los estudiantes sobre la forma como definen estos aspectos.

# ¿Cuál es la probabilidad de aplicar un tratamiento específico según los resultados?

## ! IDEAS CLAVE:

- La regla de la multiplicación como método para calcular eventos que dependen del orden de aparición.
- Clasificación de los eventos.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Ejercito la regla de la multiplicación para calcular la probabilidad.
- Justifico las características de las situaciones para aplicar la regla de la multiplicación.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes calculen probabilidades de eventos que pueden ocurrir de forma independiente.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Fotocopia de la situación problema.

#### Desarrollo Propuesto:

Presente la situación que orienta la secuencia de la semana anterior con las siguientes modificaciones:

**Situación 1:** El veterinario realiza ensayos clínicos de los exámenes de 99 reses, y los registra en las siguientes tablas:

RESULTADOS DE EXAMENES DE SANGRE ANTRAX		
	Resultado positivo	Resultado negativo
La res está enferma	50	35
La res no está enferma	10	4

#### RESULTADOS DE EXAMENES DE SANGRE FIEBRE AFTOSA

	Resultados positivo	Resultado negativo
La res está enferma	60	25
La res no está enferma	7	7

Se selecciona una res al azar:

1. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una res que esté enferma de ántrax?
2. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar dos reses que estén enfermas de aftosa?
3. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar tres reses que estén con resultados positivos de fiebre aftosa?
4. ¿Cuáles la probabilidad de seleccionar las reses que requieren el tratamiento?

Permita que los estudiantes realicen las preguntas y anote las respuestas en el tablero. Seleccione las respuestas que

se refieren a la manera en que interactúan dos eventos de forma independiente o dependiente y realice las siguientes preguntas: *¿Cuándo se selecciona una res, ésta afecta la cantidad para seleccionar otras?* Sí, porque se reduce la cantidad de reses que se tenían inicialmente, por lo tanto los eventos son dependientes. *¿Si se selecciona una res enferma de ántrax y otra de fiebre aftosa, se altera la probabilidad de tener reses enfermas?* la probabilidad no se altera porque son dos eventos independientes.

Organice tríos y que resuelvan las preguntas dadas en la situación. Paralelamente, recolecte evidencias donde se verifique que los estudiantes analizan y diferencian los eventos independientes y los dependientes. Cuando revise el valor de la probabilidad, fíjese de nuevo que no estén contando dos veces la misma población. Luego, cada uno de los grupos intercambia cuadernos para revisar los procedimientos elaborados por los compañeros y realizar las aclaraciones correspondientes.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes practiquen la regla de la multiplicación para calcular la probabilidad de eventos compuestos.

#### Materiales:

- 15 palillos.
- 2 dados.
- 2 barajas españolas.

Solicite el material a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Se mantienen los grupos y trate que no se vean unos a otros. Cada uno de ellos tiene que escribir tres situaciones que permitan aplicar la regla de la multiplicación y que comprueben sus relaciones con los materiales. Luego, escriben en una hoja las situaciones para que se intercambien entre ellos y que sean leídas sin resolverse. Cuando se termine la lectura, cada uno de los grupos realiza un diálogo con los otros para mirar si la situación inventada estaba acorde con la aplicación de la regla de multiplicación. Paralelamente, recolecte evidencias sobre la forma de razonar y concluir que son o no eventos dependientes o independientes.

Invite a cada uno de los estudiantes a resolver las siguientes situaciones para verificar que sí establecen las relaciones de los eventos.

**Situación 1:** ¿Qué probabilidad tendremos de obtener 2 reyes, sacando una carta de dos barajas distintas, cada una de 40 cartas?

**Situación 2:** ¿Qué probabilidad tendremos de obtener 2 reyes de una misma baraja?

**Situación 3:** ¿Qué probabilidad tendremos de obtener 4 ases, sacando una carta de dos barajas, cada una de 40 cartas?

Paralelamente, recolecte evidencias sobre la forma como cada estudiante resuelve estas tareas. De la primera pregunta que se relaciona con probabilidad de eventos independientes, valide procedimientos que se desarrollen de la siguiente manera:  $P(S1) = \frac{1}{40} \times \frac{1}{40} = \frac{2}{40} = 5\%$ . Para la segunda pregunta los eventos son dependientes por tanto, la probabilidad es  $P(S2) = \frac{1}{40} \times \frac{1}{39} = \frac{1}{1560} = 0,064\%$ .

Cierre, retomando la pregunta de la semana y qué los estudiantes determinen las características que deben cumplir las situaciones aleatorias para determinar probabilidades de eventos compuestos. Recolecte evidencias de los estudiantes sobre la forma como definen estos aspectos.

# ¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado falso?

## ! IDEAS CLAVE:

- Características de la probabilidad.
- La relación entre suceso, resultados posibles, espacio muestral, frecuencia relativa, combinatoria y proporcionalidad.
- Métodos como listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo, reglas de la suma y regla de la multiplicación.
- Clasificación de los eventos probables.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Identifico las características de los fenómenos determinísticos y aleatorios.
- Uso conceptos básicos de probabilidad.
- Calculo la probabilidad de eventos usando métodos diversos.
- Uso diferentes registros para representar la probabilidad como porcentajes, fraccionarios y decimales.
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con modelos para calcular la probabilidad.
- Produzco textos orales y escritos que evidencian el conocimiento que he alcanzado acerca de un fenómeno aleatorio.

## Primera sesión

*Algunos de los obstáculos que impiden el desarrollo de un pensamiento de las probabilísticos son: Las propias concepciones de azar y aleatoriedad, confundir aleatorio como hecho fortuito de los fenómenos de la realidad, abordar la probabilidad como un simple resultado de un cálculo matemático que aporta información sobre el fenómeno, la dificultad de distinguir la información objetiva ligada al fenómeno de la información subjetiva producto de la interpretación del sujeto, y dificultades en razonamientos de combinatoria y proporcionalidad (Azcarate y otros, 2001).*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se comparten dudas y respuestas de cada una de las semanas.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Anotaciones en el cuaderno.

#### Desarrollo Propuesto:

Se propone que los estudiantes revisen sus respuestas a las preguntas de cada una de las semanas y sus contribuciones a la pregunta de la secuencia. La invitación es

que cada estudiante genere preguntas que sean aclaradas desde lo escrito; en ese caso, las escribe y se las hace al público. Se le invita a cada uno de los estudiantes a que contesten las preguntas. En ese caso particular, usted

puede evaluar y recolectar evidencias de la capacidad argumentativa y manejo conceptual de la probabilidad de los estudiantes cuando alguien le aclara a los demás los aspectos o hacen las preguntas.

### Actividad 2

**En qué consiste:** Se comparte soluciones de la situación problema que orientó la secuencia.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación problema que orientó la secuencia.
- Anotaciones en el cuaderno.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice cuatro grupos. Cada uno de los grupos da las respuestas a las preguntas que se construyeron en la primera semana con relación al problema y se analiza la pertinencia de éstas con la situación. Además, exija a cada uno de los grupos que elaboren la respuesta a la situación. Indíqueles que realicen tablas de datos con las condiciones y que ahora la cantidad de reses valoradas con el examen es 1 000 reses. Valide la información que presentan los estudiantes con relación del cálculo de probabilidad de eventos compuestos.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes construyan un mapa conceptual.

#### Materiales:

- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.

#### Desarrollo Propuesto:

Cada uno de los estudiantes enuncian palabras que se relacionan con las nociones matemáticas trabajadas durante el desarrollo de la secuencia como *conteo*, *diagramas de árbol*, *probabilidad compuesta*, *probabilidad simple*, *evento*, *suceso*, *evento simple*, *evento compuesto*, *azar*, *aleatoria*, *frecuencia relativa*, *ley de los números grandes*, *probabilidad subjetiva*, *probabilidad objetiva*, *forma clásica*,

*empírico*, *experimento*, *eventos excluyentes*, *eventos compatibles*, *eventos independientes*, *eventos dependientes*, *regla de la suma*, *regla de la multiplicación*, *escala*, *porcentaje*, *decimales*, *fraccionarios*.

Ahora, organice los mismos grupos de la sesión anterior. Con las palabras, cada uno de los grupos construye un mapa conceptual. Luego, cada uno lo expone, lo explica y se selecciona el que mejor represente las conexiones con lo trabajado durante la ejecución de la secuencia. Los demás estudiantes anotan en sus cuadernos el mapa conceptual expuesto por cada grupo para que posteriormente pueda ser analizado y discutido.

# Cierre y Evaluación

## ! IDEAS CLAVE:

- La probabilidad de ocurrencia en diferentes contextos.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Identifico el uso de la probabilidad en diferentes contextos.

### Primera sesión

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes contesten las siguientes situaciones.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Fotocopia de las situaciones.

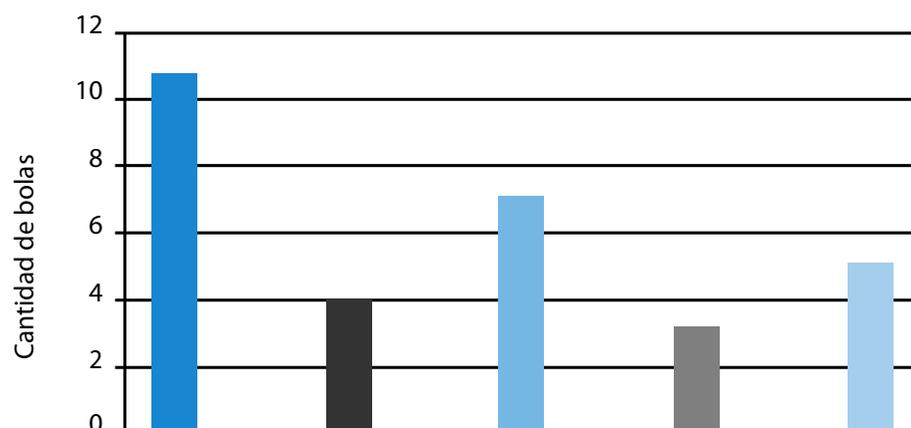
#### Desarrollo Propuesto:

Se sugiere que cada uno de los estudiantes tenga la fotocopia de las siguientes situaciones para resolverlas en una hoja:

#### Situación 1:

En un evento de seleccionar personal para diferentes zonas del país, se decide hacer un sorteo. Cada uno de los participantes en el sorteo debe tomar una bola de una bolsa negra. A continuación se muestra la cantidad de bolas que hay en la bolsa y la región que se tendría que trasladar el personal:

#### Sorteo de personal



## PREGUNTA 1

¿Cuál es la probabilidad de que una persona tome una bola de color verde?

- A. 10%
- B. 30%
- C. 60%
- D. 50%

## PREGUNTA 2

¿Cuáles son las zonas que solicitan más personal?

- A. Llano y Amazonas
- B. Caribe y Andina
- C. Amazonas y Pacífico
- D. Caribe y Pacífico

## PREGUNTA 3

Si el sorteo se realiza para 600 personas, ¿cuántos saldrían para la zona del Amazonas, si cada vez que se selecciona una bola, ésta vuelve ingresar a la bolsa?

- A. 100
- B. 200
- C. 280
- D. 460

Al finalizar, cada uno de los estudiantes intercambia sus pruebas y analizan la calidad de las justificaciones. Oriente la revisión con la pregunta: *¿Qué significa que esta bien?* Para algunos estudiantes "está bien" resuelta la situación porque lo hizo igual a lo que él hizo; es necesario que les indique que

es con relación a lo desarrollado con la probabilidad. Cada uno de los estudiantes evaluadores escribe la respuesta de esta pregunta. Luego, recoja evidencias de las producciones escritas de los estudiantes y pregunte sobre las dudas que se le presentaron con la situación e invite a otros a aclararla.

## Segunda sesión

### Desarrollo Propuesto:

Continúe con las siguientes situaciones para que los estudiantes las resuelvan por parejas:

**Situación 2:** En una carrera ciclista participan 30 personas. Se estima que la probabilidad de que gane uno es el doble de la probabilidad de que gane cada uno de los otros tres; si esto se mantiene sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad que gane el ciclista número 5?

**Situación 3:** El 30 % de los hombres que fuman tiran las colillas al suelo. Sólo un 5 % de las mujeres que fuman comenten esta falta. En una reunión que hay 15 fumadores y 20 fumadoras, aparece una colilla en el suelo. ¿Cuál es la probabilidad que la haya tirado una mujer?

Recolecte evidencias recogiendo las producciones de los estudiantes. De nuevo pregunte sobre las dudas que se les presentaron y busque que los otros la ayuden a esclarecer. Trate que estas dudas se refieren a lo conceptual trabajado en la secuencia.

## Instrumento para las evaluaciones del aprendizaje

El aprendizaje relacionado con la probabilidad se hace evidente cuando los estudiantes reconocen sus características a través de varias situaciones e identifican todos los valores posibles. En la siguiente tabla se presentan algunas descripciones que permiten valorar algunos de los procesos matemáticos que se evidencian en la secuencia. Esta puede ser utilizada por el docente para determinar el nivel de aprendizaje que logró el estudiante en la ejecución de la secuencia.

SUBCONCEPTOS CONCEPTO	ESTIMACIÓN	DEDUCCIÓN
Probabilidad	<ul style="list-style-type: none"><li><input type="checkbox"/> Determina un valor numérico como razón.</li><li><input type="checkbox"/> Identifica las relaciones entre los eventos.</li><li><input type="checkbox"/> Reconoce todos los posibles eventos de una situación de azar.</li><li><input type="checkbox"/> Resuelve situaciones que exigen la probabilidad.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li><input type="checkbox"/> Determina una conclusión a partir de los datos numéricos.</li><li><input type="checkbox"/> Realiza los cálculos generales.</li><li><input type="checkbox"/> Toma decisiones a partir de los resultados.</li><li><input type="checkbox"/> Interpreta bien la información.</li></ul>



¿Cómo describir  
variaciones del  
tamaño de cercas  
para los animales?

# ¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?

## Visión General

El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado noveno describan y representen situaciones de variación con funciones polinómicas. La situación problema que orienta la secuencia es:

*En una finca se requiere colocar cercas para los animales que ésta tiene. Jorge quiere determinar la mejor forma de encerrar, de distribuir el espacio y tener claridad sobre la cantidad de alambre que requiere comprar para cercar. No obstante, no cuenta con instrumentos para medir grandes extensiones, por lo cual requiere hallar un procedimiento que le permita calcular el perímetro y el área del terreno para poder cercarla y también estimar la cantidad de materiales requeridos.*

Es por esto que esta secuencia propone acciones para resolver la pregunta: **¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?** Además, esta secuencia promueve el desarrollo del pensamiento matemático y de habilidades comunicativas para comprender información de variables que se representan a través de tablas, gráficas o expresiones algebraicas; además, establece suposiciones para verificar, adecuar y construir preguntas o formular problemas. Constantemente se dan espacios para que los estudiantes comuniquen a otros sus comprensiones con relación a lo que se propone en cada una de las actividades asociadas a la comprensión de las funciones polinómicas.

La secuencia didáctica, en la semana 1, aborda la comprensión de la situación problema y la determinación de algunas variables que se pueden establecer con la situación. En la semana 2 se desarrollan actividades con el geoplano para que los estudiantes realicen experiencias de variación y manejen tres tipos de representación que son la tabular, la gráfica y la sagital. En la semana 3 se aborda la función lineal para modelar algunas situaciones y se complementa en la semana 4 que aborda los significados de los parámetros y las representaciones. En las semanas 5 y 6 se estudia la función cuadrática y los significados de los parámetros y sus representaciones.

Como proceso de cierre de la secuencia, en la semana 7 se retoma la situación problema que orientó la secuencia y con lo que se desarrolló en las anteriores semanas, se da respuesta a la pregunta central de la secuencia. Finalmente, en la semana 8 se establecen otras conexiones con otras situaciones. Se espera que el docente determine los aprendizajes de los estudiantes con relación a las funciones polinómicas y puede utilizar el INSTRUMENTO PARA LAS EVALUACIONES DEL APRENDIZAJE que permite

---

evaluar algunas de las características de las funciones polinómicas que se observan a través de las representaciones de tablas, expresiones algebraicas y gráficas; para ello se recomienda observarlo antes de desarrollar la secuencia. Así mismo, a lo largo de cada una de las actividades de aprendizaje, se sugieren momentos de evaluación cuando se invita tanto al docente como a los estudiantes a reflexionar sobre lo construido, haciéndose explícitas al inicio, en la parte intermedia y al final de la secuencia. Además, se recuerda que la evaluación debe ser continua y permanente al largo del proceso educativo, en el que a la vez que se enseña, se evalúa y se aprende, pues todo acto de evaluación implica un aprendizaje.

Los desempeños esperados de un estudiante para esta secuencia didáctica son:

- Modeló situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Identifico la relación entre los cambios de los parámetros de la representación algebraica en las funciones polinómicas.
- Establezco la relación entre los cambios de los parámetros con la representación gráfica de las funciones polinómicas.
- Analizo los comportamientos de cambio de las funciones polinómicas.
- Determino las propiedades de relación positiva y negativa entre variables, de variación lineal, de variación cuadrática y de variación polinómicas.

*¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?*

SEMANA	PREGUNTAS GUÍA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS
1	<i>¿Qué puede variar en las formas de las cercas?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La relación de dependencia entre dos variables.</li> <li>• Tipos de variables: Dependiente e independiente.</li> <li>• Algunas características de la función como dominio y rango.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enuncio verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en la situación.</li> <li>• Identifico el dominio y el rango de una función.</li> <li>• Argumento las relaciones positiva y negativa entre variables.</li> </ul>
2	<i>¿Cómo representar las variaciones de las diferentes medidas de las cercas?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Las funciones se representan a través de tablas y gráficas.</li> <li>• Algunas propiedades de las funciones que se identifican en la representación tabular.</li> <li>• Algunas propiedades de las funciones que se identifican en la representación gráfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establezco la relación existente entre tablas y gráficas.</li> <li>• Caracterizo la función a partir de las representaciones.</li> <li>• Explico algunas relaciones matemáticas con las variables involucradas en la situación.</li> </ul>
3	<i>¿Cuánto material se requiere para armar una cerca?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La función lineal para modelar situaciones de proporcionalidad directa.</li> <li>• La función afín como la expresión algebraica <math>f(x) = ax + b</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relaciono la función lineal para modelar situaciones de proporcionalidad directa.</li> <li>• Establezco relaciones entre las funciones lineales y afines.</li> </ul>
4	<i>¿Cómo representar las variaciones de la cantidad de material que se requiere para armar las cercas?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Características de las representaciones de las funciones lineales.</li> <li>• Características de las representaciones de las funciones afines.</li> <li>• Los procesos de interpolación y extrapolación para encontrar datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Determino las características de las representaciones de las funciones lineales.</li> <li>• Ejercito algunos procedimientos estandarizados para determinar la expresión algebraica de una función</li> <li>• Explico la relación que existe entre una función lineal y una función afín.</li> </ul>
5	<i>¿Cuánto varía el tamaño de los terrenos a cercar?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelación de situaciones con las funciones cuadráticas.</li> <li>• Características de las funciones cuadráticas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caracterizo la función cuadrática.</li> <li>• Explico las características de la función cuadrática.</li> <li>• Utilizo las tablas y gráficas para resolver problemas.</li> </ul>
6	<i>¿Cómo representar variaciones del tamaño de los terrenos a cercar?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algunos significados de los parámetros de las funciones cuadráticas.</li> <li>• La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.</li> <li>• Características de las traslaciones de las parábolas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Determino las características de las parábolas.</li> <li>• Establezco relaciones entre las diferentes representaciones de la función cuadrática.</li> </ul>
7	<i>¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representaciones tabulares y gráficas correspondientes a las funciones polinómicas.</li> <li>• Características de la variación de las funciones polinómicas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.</li> <li>• Identifico la relación entre los cambios en los parámetros con la representación algebraica de las funciones polinómicas.</li> <li>• Establezco la relación entre los cambios en los parámetros con la representación gráfica de las funciones polinómicas.</li> <li>• Analizo los comportamientos de cambio de las funciones polinómicas.</li> <li>• Determino las propiedades de relación positiva y negativa entre variables, de variación lineal, de variación cuadrática y de variación polinómicas.</li> </ul>
8	<b>Cierre y Evaluación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicación de las funciones polinómicas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Empleo las características de las diferentes funciones polinómicas.</li> <li>• Resuelvo problemas que requieren de las funciones polinómicas.</li> </ul>

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- Actividades de comprensión de la situación problema para determinar la pregunta y las formas de modelar la situación.
  - Actividades para determinar las funciones, el dominio y el rango
- 
- Situaciones de modelación con el geoplano para deducir los datos en cuanto a las formas y dimensiones de los lados de unos cuadriláteros a través de tablas.
  - Situaciones que se modelan con gráficas y tablas para que los estudiantes comprenden la información.
  - Las discusiones giran en torno a determinar las propiedades que se visualizan con las representaciones de las funciones.
- 
- Situaciones sobre la relación del número de filas de alambrado y altura del alambrado de la cerca.
  - Las discusiones giran en torno a construir una expresión algebraica o fórmula que modele la situación y que se ajuste a los resultados de la realidad.
- 
- Actividades para comprender los parámetros a través de la representación de las funciones lineales y afines.
  - Actividades para plantear funciones que modelen las situaciones de la altura de la cerca con respecto a la cantidad de alambre y el tipo de animal que se quiere encerrar.
  - Las discusiones se relacionan con las características de las funciones.
- 
- Se plantea la situación problema de averiguar el área de terrenos cuadrangulares para colocar una cerca y ser modelada por una función cuadrática.
  - Se ofrecen varias situaciones problema para que los estudiantes identifiquen características de las funciones cuadráticas.
  - Las discusiones con los estudiantes se relacionan con las características de la función cuadrática.
- 
- Situaciones de discusión sobre los parámetros de las funciones cuadráticas, desde las formas como se altera su representación gráfica.
  - Se dan situaciones para identificar las traslaciones verticales, oblicuas y horizontales que tienen las parábolas.
- 
- Actividades para que los estudiantes reflexionen sobre la modelación de situaciones con las funciones polinómicas. Tal condición permite el reconocimiento del proceso que se llevó para obtener una posible respuesta a la pregunta guía de la secuencia.
- 
- El proceso de evaluación se da a través de situaciones que tratan las diferentes representaciones de las funciones polinómicas.

# ¿Qué puede variar en las formas de las cercas?

### ! IDEAS CLAVE:

- La relación de dependencia entre dos variables.
- Tipos de variables: Dependiente e independiente.
- Algunas características de la función como dominio y rango.

### ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Enuncio verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en la situación.
- Identifico el dominio y el rango de una función.
- Argumento las relaciones positiva y negativa entre variables.

Inicie la secuencia didáctica explorando los saberes previos de los estudiantes para determinar qué saben y qué no saben con respecto a la temática a trabajar. Esta exploración corresponde a una evaluación diagnóstica que le permite a usted identificar el lugar de donde puede partir para la construcción de conocimiento. Puede realizarla por medio de actividades orales, escritas y juegos, entre otros. Además, la evaluación diagnóstica le permite establecer un punto inicial, adecuar las actividades a los estudiantes y evidenciar el desarrollo de competencias durante la secuencia didáctica.

### **Primera sesión**

Existen situaciones de variación que involucran muchas variables pero en esta secuencia se abordan las situaciones que permiten involucrar y relacionar dos variables, de tal manera que es posible determinar, entre ellas, diferentes variaciones. Algunos modelos variacionales que se reconocen son las funciones polinómicas, las funciones racionales y las funciones trascendentales, cada una de ellas determina una organización de los datos que dejan averiguar la tendencia de los mismos, y a la vez, estudiar el comportamiento de los fenómenos o de las situaciones que modela.

#### **Actividad 1**

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes comprendan el problema que orienta la secuencia.

Secuencia didáctica: **¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?**

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación problema.
- Hojas de papel y lápiz.

#### Desarrollo Propuesto:

Se organizan grupos de 4 estudiantes. El docente entrega la situación problema:

En una finca se requiere colocar cercas para los animales que ésta tiene. Jorge quiere determinar la mejor forma de encerrar, de distribuir el espacio y tener claridad sobre la cantidad de alambre que requiere comprar para cercar. No obstante, no cuenta con instrumentos de medida para medir grandes extensiones, por lo cual requiere hallar un procedimiento que le permita calcular el perímetro y el área del terreno para poder cercarla.

Cada uno de los grupos debe leer el problema y determinar cuáles serían las preguntas que se tendrían que contestar según la situación descrita. Cada uno de los grupos expone sus preguntas y se seleccionan las que involucran relaciones entre dos variables, por ejemplo, la cantidad de alambre que se requiere según el número de vueltas, la altura visible de la cerca para determinar hasta qué punto se van a enterrar cada uno de los postes y sea conveniente para los animales, la cantidad de postes que se requieren para determinado espacio, el área que se determina según la forma, el número de animales que pueden estar en el espacio determinado por la cerca, los gastos para el material de la cerca, entre otros. Ahora invite a los estudiantes que realicen una lista de los conocimientos matemáticos que se requieren para solucionar las preguntas que se escogieron anteriormente. Luego, seleccione la pregunta que

se relaciona con la variación de los tamaños de las cercas con la pregunta de la secuencia que es: **¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?**

Cada uno de los grupos realiza los dibujos de los modelos de las cercas que van a desarrollar y el plan de trabajo para elaborar dicha cerca en una maqueta. Indíqueles que tienen que explicitar la respuesta a la pregunta de la semana: **¿Qué puede variar en las formas de las cercas?** Permita que cada uno de los grupos muestre sus planes de trabajo y posible modelo de cerca para los animales y simultáneamente indíqueles a los otros que contribuyan a mejorar los modelos y den ideas que complementen las propuestas. Así mismo cada uno de los grupos tiene que realizar las anotaciones en el cuaderno y recolecte evidencias para usarlas en la semana 7. Este es un momento adecuado de cerrar la sesión.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes identifiquen algunas relaciones entre variables para determinar dominio y rango de una función.

#### Materiales:

- Lápiz y hojas de papel.
- Una calculadora.

#### Desarrollo Propuesto:

Mantenga los mismos grupos de la sesión anterior. Indíqueles que tienen que resolver las siguientes situaciones:

**Situación 1:** La cerca que se requiere es para un terreno rectangular de 20 metros cuadrados. *¿Si se mantiene el valor del área y se modifica el ancho, cómo cambia el largo?*

Solicite el material a los estudiantes. Se le sugiere al docente elaborar las tablas de datos con ayuda de un programa o un simulador de datos como Excel.

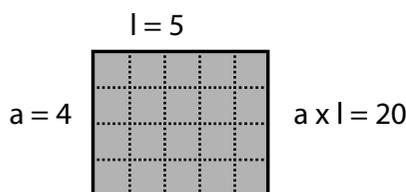
**Situación 2:** La cerca que se requiere es para un terreno rectangular de 36 metros de perímetro. ¿Si se mantiene el valor del perímetro y se modifica el ancho, cómo cambia el largo?

**Situación 3:** La cerca que se requiere es para un terreno rectangular. Cada 10 metros se coloca un poste para determinar los amarres del alambre. Si el ancho mide 30 metros y el largo se puede modificar de 10 metros en 10 metros; es decir, un terreno puede medir  $30\text{ m} \times 10\text{ m}$ , otro  $30\text{ m} \times 20\text{ m}$ , y así sucesivamente alterando la medida del largo y permaneciendo constante la medida del ancho. ¿Cómo cambia el número de postes que se requiere, si se modifica el largo del terreno?

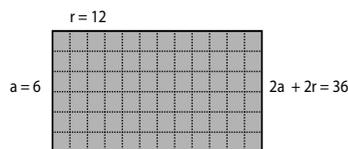
**Situación 4:** La cerca que se requiere es para un terreno rectangular cuyo largo mide 50 metros y el ancho mide 400 metros. Si se coloca cada fila de alambre cada 40 centímetros y se tiene previsto material para 10 vueltas. ¿Cómo cambia la cantidad de alambre que se requiere según el número de vueltas para cercar el terreno?

Cada uno de los grupos resuelve las situaciones. Deje aproximadamente quince minutos para que los grupos traten de resolverlas y paralelamente recolecte evidencias de la forma como están abordando cada una de las situaciones. Apruebe que se compartan estas formas y busque que los estudiantes hagan las preguntas necesarias para aclaraciones. Invítelos a que realicen dibujos de cada una de las situaciones y valide los que se parecen a las siguientes imágenes. Recuérdeles que dichos dibujos son casos particulares de cada una de las situaciones y que lo que se tiene que garantizar son las condiciones de cada una de las mismas:

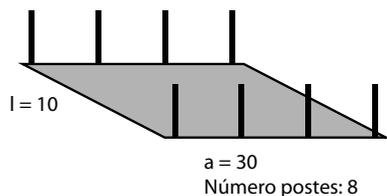
Situación 1



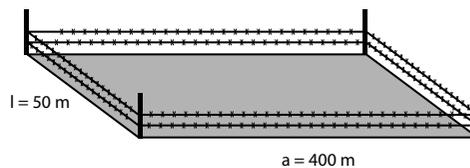
Situación 2



Situación 3



Situación 4



Luego, permita que cada uno de los grupos resuelva las mismas situaciones indicándoles que coloquen otras medidas; que realicen los cálculos y que organicen los datos en tablas.

Una función modela una situación en la que existe una relación de dependencia entre variables. Hay funciones que tienen variables independientes que determinan la variable

dependiente, por ejemplo:  $f(x,y) = x^2 + y^2$  donde  $x$  y  $y$  son las variables independientes y  $f(x,y)$  es la variable dependiente. En el desarrollo de la secuencia se abordan funciones de dos variables, donde una es la variable independiente y la otra es dependiente. Por ejemplo:  $f(x) = 2x^3 - 4x + 2$  donde  $x$  es la variable independiente y  $f(x)$  la variable dependiente. En algunos

casos se asocia las expresiones  $f(x, y)$  o  $f(x)$  a una letra minúscula para enunciar la variable dependiente con esa letra.

Organice una puesta en común para cada una de las situaciones. Para la primera situación oriente la discusión con las siguientes preguntas: *¿Qué variables se pueden definir en la situación?* La variable independiente es el ancho y la variable dependiente es el largo. *¿Se puede determinar alguna relación entre las variables?* Valide que el largo de-

pende del ancho. *¿Qué valores numéricos pueden tomar las variables?* Posiblemente, los estudiantes contesten que los valores numéricos que corresponden a los números naturales que al multiplicarse dan 20, pero pocos contestan que son valores numéricos que le atañen a los números reales positivos. Por lo tanto indíqueles que llenen la siguiente tabla realizando los cálculos con la ayuda de una calculadora:

Medida del ancho (en m)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
Medida del largo (en m)																				

Luego de diligenciar la tabla, pregúnteles: *¿Cómo emplearon la calculadora para determinar el valor del ancho del terreno?* Lo que tienen que mostrar los estudiantes es que realizan una división donde el dividendo es 20 y el divisor es el valor del ancho dado en la tabla, por lo tanto, el resultado es el valor de la medida del largo. *¿Es posible que un valor numérico del ancho tenga muchos valores para el largo?* Apruebe que los estudiantes discutan al respecto, que usen ejemplos de los datos usados en la tabla y recolecte evidencias de los argumentos de los estudiantes para usarlos en la explicación sobre qué es una función.

Ahora, indíqueles a los grupos que realicen las otras situaciones y que den respuesta a las preguntas: *¿Qué variables se pueden definir en la situación?*, *¿qué valores numéricos pueden tomar las variables?*, *¿cómo emplearon la calculadora para determinar el valor correspondiente a la variable dependiente?* y *¿es posible determinar que cada valor de la variable independiente le corresponda sólo?* Luego, permita que los grupos compartan sus respuestas y valide con respecto a la situación 2, que la variable dependiente es el largo y la variable independiente es el ancho, mientras los valores numéricos correspondientes a ambas variables son los números reales positivos, por tal razón, para determinar el valor del largo con la calculadora tiene dos opciones. Primera opción: a 18 le quita el valor del ancho, segunda opción: realiza la resta de quitarle el doble del ancho a 36; y ese resultado lo divide por 2. Con respecto a la situación 3, la variable in-

dependiente es el largo y la variable dependiente es el número de postes, de tal manera que los valores numéricos correspondientes al largo son los números reales positivos; por otro lado, para el número de postes le corresponden los números naturales y para los cálculos se tiene que incrementar la medida del largo del terreno en 10 unidades y simultáneamente incrementa en 2 postes. Finalmente, con respecto a la situación 4, las variables son el número de vueltas y la cantidad de alambre; los valores numéricos correspondientes a la cantidad de alambre son los números reales positivos y el número de vueltas corresponde a los números naturales, es por eso que con la calculadora se multiplica el valor del perímetro del terreno por el número de vueltas. En todas las situaciones los estudiantes tienen que mostrar ejemplos de que a cada uno de los valores de la variable independiente le corresponde solo un valor de la variable dependiente para declarar que es una función.

Luego, explique que es una función utilizando los argumentos de los estudiantes al estudiar las situaciones. Dígalos que en el caso de dos variables, una definición de función es:

*Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos numéricos o de medidas cualesquiera. Si existe una correspondencia (o regla) que asocia a cada elemento  $x$  de  $A$  un único elemento  $y$  de  $B$ , diremos que  $y$  es función de  $x$  y se escribe  $y = f(x)$  o  $x \rightarrow f(x)$ , donde el conjunto  $A$  es el dominio de la función y el conjunto  $B$  es el rango de la función.*

Cierre la sesión con la pregunta de la semana y qué escriban lo que aprendieron con las actividades desarrolladas.

# ¿Cómo representar las variaciones de las diferentes medidas de las cercas?



## IDEAS CLAVE:

- Las funciones se representan a través de tablas y gráficas.
- Algunas propiedades de las funciones se identifican en la representación tabular.
- Algunas propiedades de las funciones se identifican en la representación gráfica.



## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Establezco la relación existente entre tablas y gráficas.
- Caracterizo la función a partir de las representaciones.
- Explico algunas relaciones matemáticas con las variables involucradas en la situación.

### Primera sesión

*La representación tabular de una función posee ventajas y desventajas. Como ventaja, la tabla muestra a cada elemento su correspondiente imagen, y si se organizan los valores del dominio que se utilizaron de forma ascendente, es posible percibir cómo varían los valores del rango en ese intervalo. Y como desventaja, la tabla se reduce sólo a esos datos y no es posible determinar la tendencia o evolución de un fenómeno cuando se tienen varios valores del dominio como sí lo facilita la representación gráfica.*

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes interpreten datos de tablas y puedan inferir una forma de asociación para determinar una función.

#### Materiales:

- 1 Geoplano.
- Lana de colores, aproximadamente 1 metro.
- 1 Regla graduada.
- Hojas de papel y lápiz.
- 1 Calculadora.



Solicite a los estudiantes con anterioridad el material.

**Desarrollo Propuesto:**

Organice grupos de 3 estudiantes. Cada grupo contesta: ¿Cómo cambia el área a medida que cambia la longitud del tamaño del terreno cuadrangular que se cerca? Cada uno de los grupos escribe la respuesta y explican ¿por qué creen que la variación de los datos es de esa forma?; elabora tablas que representen la información de la longitud del lado (distancia de una puntilla a otra) y el área del cuadrado que se determina por ese lado. Pregúnteles: ¿Cuál es la variable independiente?, ¿cuál es la variable dependiente? y ¿cómo se asocian esas variables? Valide respuestas que digan que la longitud del lado es la variable independiente, el área es la variable dependiente y lo que se calcula es la potencia de elevar a la dos la longitud del lado.

Invite a los grupos que compartan entre sí las tablas, y las respuestas de las preguntas. Autorice que validen la información realizando correcciones y preguntas entre ellos para solicitar aclaraciones. Luego, cada uno de los grupos revisa si su suposición del comportamiento de estas dos variables se cumplió y de ser necesario, que se corrija con la información recogida de las tablas.

Ahora, indíqueles que se le va a mostrar una tabla que representa datos y a partir de ella, cada uno de los grupos debe determinar los rectángulos en el geoplano y dibujarlos en el cuaderno. Esta es:

<b>Ancho</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Largo</b>	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Además, cada uno de los grupos tiene que determinar si existe una función o una relación y cómo se relacionan los datos. Organice una puesta en común y guie la discusión con las preguntas: ¿Cuáles son las variables que se relacionaron con las situaciones del geoplano? y ¿es posible determinar un enunciado para establecer la relación entre las va-

riables?, ¿cuál? Valide aquella respuesta donde se enuncie que las tablas presentan funciones ya que se determina tres aspectos: Una regla que asocia a cada elemento del dominio una imagen, unos valores como dominio y unos valores como rango. En el caso de los cuadrados, el área depende de la potencia de elevar a la dos la longitud del lado, la variable dependiente es el área y la variable independiente es la longitud del lado. En el caso de los rectángulos el largo es el doble del ancho, entonces la variable independiente es la longitud del ancho y la longitud del largo es la variable dependiente.

*Algunas investigaciones muestran que la ubicación horizontal de la tabla permite visualizar el crecimiento y decrecimiento de cada una de las variables; y la ubicación vertical permite visualizar la forma de cambio de un valor a otro entre los valores de forma simultánea.*

Para evaluar coloque a cada grupo la siguiente situación:

En la tabla se presenta información del promedio de precipitaciones que se dieron en el país el año pasado.

Mes del año	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Promedio de Precipitaciones (lluvia, mm)	134,68	120,12	81,08	17,43	10,78	25,45	24,56	67,43	23,64	34,64	11,12	15,39

Contesten:

1. ¿Cuáles son las variables involucradas?
2. ¿Cuál es el mes de más lluvia?
3. ¿Cuál es el mes de menos lluvia?
4. ¿Siempre es posible determinar con precisión los valores de estas variables?

Este es un momento adecuado de cierre de la sesión.

**Segunda sesión**

**Actividad 1**

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes grafiquen la información dada en las tablas.

## SEMANA 2

### Materiales:

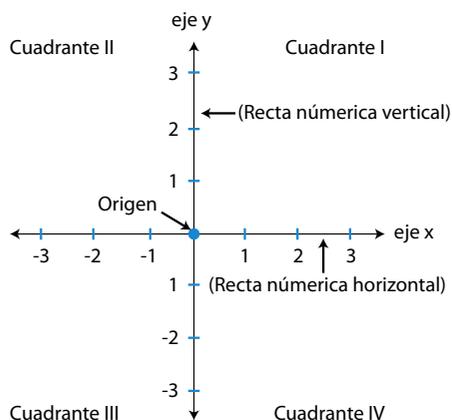
- Lápiz y hojas de papel.
- Apuntes de clase.
- Una calculadora.

Se le sugiere al docente elaborar las gráficas parecidas a las que se muestran con la ayuda de un programa o un simulador que se encuentre en la red como *Geogebra* o *Graphmatica*, entre otros. Igualmente si se le facilita en la escuela que cada grupo tenga un computador o una calculadora graficadora con algún programa como *Excel*, *Derive* o *Math*, ya que puede adaptar mejor esta actividad.

### Desarrollo Propuesto:

*La representación gráfica es ideal para representar las funciones porque permite visualizar tendencias o evolución del fenómeno, dominio, rango, continuidad, puntos de corte con los ejes y la curva o línea que forman sus puntos.*

Organice los mismos grupos de la sesión anterior. Realice las siguientes aclaraciones con respecto a las **coordenadas** cartesianas: Se representan dos ejes, cada uno es una recta numérica, que se interseca perpendicularmente en el punto (0,0) y se denomina origen del plano cartesiano. La recta horizontal se denomina **eje x** o de las **abscisas** y la recta vertical se denomina **eje y** o de las ordenadas. Esta distribución genera cuatro espacios que se llaman cuadrantes y se enumeran en contra de las manecillas del reloj (Ver imagen).



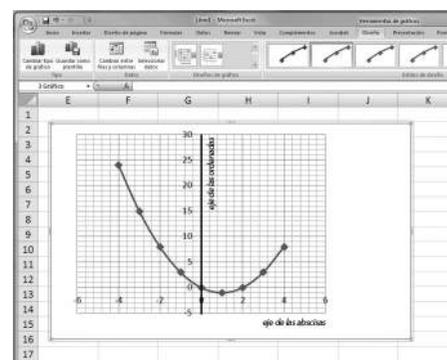
Cada uno de los puntos del plano cartesiano requiere dos coordenadas **(x, y)**; la primera coordenada se refiere a la distancia que existe desde el cero al valor **x** o la distancia desde el eje **y** al valor **x**; y la segunda coordenada se refiere a la distancia que existe desde cero al valor **y**, o desde el eje **x** al valor **y**. Simultáneamente realice el plano cartesiano y coloque algunos ejercicios a los estudiantes donde determinen coordenadas de puntos ubicados en un plano cartesiano y/o viceversa, se dan las coordenadas de unos puntos para que los estudiantes ubiquen los puntos en un plano cartesiano.

Explique a los estudiantes cómo usar un programa que le permita graficar a partir de tablas. A continuación se muestran los pasos para elaborar una gráfica cartesiana en el programa de Excel:

**Paso 1:** Coloque los valores de la tabla en una hoja de Excel.

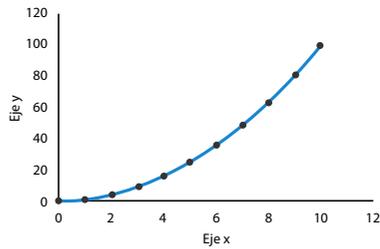
valores x	valores y
-4	24
-3	15
-2	8
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3
4	8

**Paso 2:** Seleccione **Tabla de Datos**, y del menú de **Insertar** seleccione el gráfico de dispersión, si es posible el de línea suave.

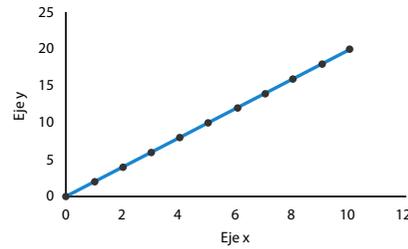


A continuación, cada uno de los grupos realiza, a mano alzada, las gráficas posibles según los datos obtenidos de las situaciones tratadas en la sesión anterior y luego que elaboren las gráficas con ayuda del programa. Valide las gráficas que se parecen a las que se muestran a continuación:

Gráfica de la función que corresponde a la potencia de elevar a la dos la longitud del lado de un cuadrado.

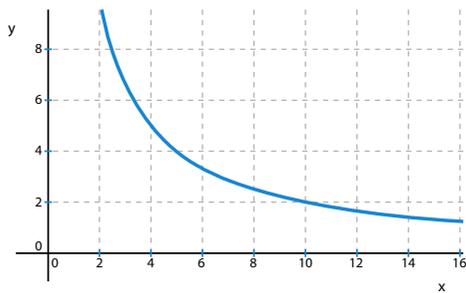


Gráfica de la función que corresponde a las medidas de un rectángulo, del cual el largo es el doble del ancho.

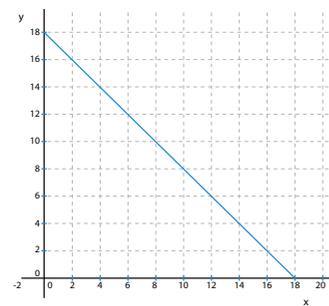


Ahora, cada uno de los grupos retoma las tablas de las situaciones de la segunda sesión de la primera semana para que construyan las 4 gráficas correspondientes a las situaciones de la cerca. Permita que los grupos compartan sus gráficas y valide las que son semejantes a las gráficas siguientes:

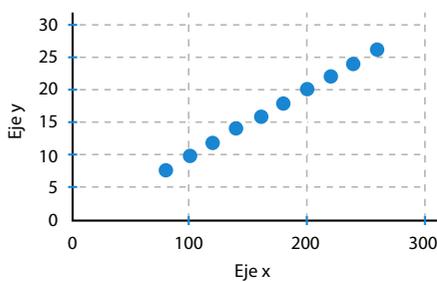
Situación 1:



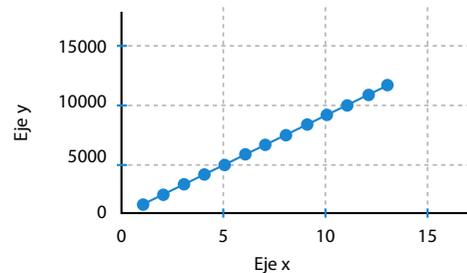
Situación 2:



Situación 3:



Situación 4:



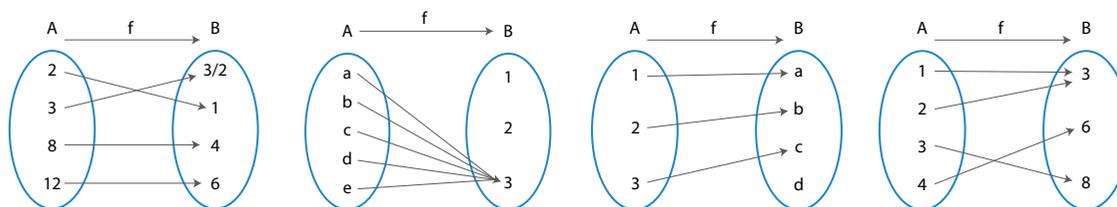
## SEMANA 2

Realice las siguientes preguntas: ¿Cómo verificar que una gráfica representa una función? y ¿es posible determinar el dominio y el rango? Valide las respuestas de los estudiantes con relación a ideas como: Se determina una función con la gráfica porque se pueden trazar segmentos perpendiculares al eje y estos cortan a la curva o la recta en un punto cumpliendo la definición de que cada punto del dominio tiene una sola imagen. El dominio y el rango se determinan porque la curva, la línea o los puntos muestran la tendencia de la misma que valores adquiere.

Otra forma de representación de las funciones es un **diagrama sagital** que consiste en dos conjuntos, uno llamado de salida (dominio) y otro llamado de llegada (rango) que muestra, a través de flechas, cómo se relacionan los elementos entre esos conjuntos. La representación de una función en diagrama sagital posee ventajas y desventajas. Como ventaja se identifica la imagen de cada elemento del conjunto de salida, pero su desventaja estriba cuando los conjuntos de salida o de llegada son infinitos, por lo cual se torna inaccesible o insuficiente.

Ahora, explique a los estudiantes en qué consiste la representación en diagrama sagital y coloque la siguiente actividad para cada grupo:

**Situación 1:** Observen cada uno de los diagramas sagitales.



Determinen:

- Los elementos del dominio.
- Los elementos del rango.
- Las parejas que se establecen según la función.
- Un enunciado verbal de la regla que define cada función.

Para cerrar y evaluar lo desarrollado en la semana, pida que den respuesta a la pregunta de la semana y qué realicen anotaciones sobre lo que se aprendió.

# ¿Cuánto material se requiere para armar una cerca?

## ! IDEAS CLAVE:

- La función lineal para modelar situaciones de proporcionalidad directa.
- La función afín como la expresión algebraica  $f(x) = ax + b$

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Relaciono la función lineal para modelar situaciones de proporcionalidad directa.
- Establezco relaciones entre las funciones lineales y afines.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes analicen la variación proporcional directa de varias situaciones.

#### Materiales:

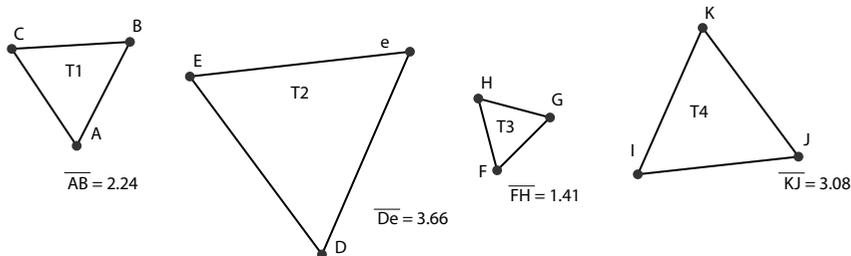
- Lápiz y hojas de papel.
- Fotocopia de la situación problema.
- Una calculadora.
- 10 triángulos equiláteros en cartulina, inicia con 1 cm hasta 10 cm de lado.
- Lana o pita, aproximadamente 1 metro.
- Una regla graduada o cinta métrica.

Se le sugiere al docente elaborar las gráficas parecidas a las que se muestran con la ayuda de un programa o un simulador que se encuentre en la red como *Geogebra* o *Grampathica*, entre otros. Igualmente si se le facilita en la escuela que cada grupo tenga un computador o una calculadora graficadora con algún programa como *Excel*, *Derive* o *Math*, ya que puede adaptar mejor esta actividad.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice grupos de la primera semana de sesión y cada uno resuelva la siguiente situación:

**Situación 1:** Calculen la cantidad de alambre que requiere la cerca para terrenos triangulares, según su longitud de lado:



Unos estudiantes han elaborado las siguientes fórmulas para determinar la cantidad de alambre que requiere la cerca:

Primera fórmula:  $f(x) = 3x^2$ , donde  $x$  es la longitud del lado del terreno triangular.

Segunda fórmula:  $f(x) = 3x$ , donde  $x$  es la longitud del lado del terreno triangular.

Tercera fórmula:  $f(x) = x + x + x$ , donde  $x$  es la longitud del lado del terreno triangular.

¿Con cuál de estas fórmulas están de acuerdo? Justifiquen su elección.

Organice 3 grupos de acuerdo a la elección de cada grupo. En los diferentes grupos, cada uno de los estudiantes lee sus argumentos y acuerdan sus razones para elaborar la posición del grupo al respecto de la anterior situación. Sugiera que señalen cómo son los incrementos de la cantidad de alambre cada vez que aumenta la longitud de la medida del terreno triangular. Indíqueles que esta suposición es la que se va a comprobar con la lana o la pita cubriendo todos los lados de cada triángulo. Más tarde deben crear una tabla con los datos, desenrollan la pita o la lana y miden con la regla la longitud de la lana requerida.

Luego, cada uno de los grupos analiza su suposición frente a los resultados que obtuvieron con las medidas. Organice una puesta en común donde se acuerde cuál es realmente la fórmula que se debe elegir. Valide las respuestas que se relaciona con la de la segunda y tercer fórmula porque éstas son las que determinan la cantidad de alambre para la cerca, puesto que establecen el perímetro del triángulo equilátero; no obstante, la que mejor representa el perímetro cada vez que se modifica la longitud del lado del terreno triangular es la fórmula 2.

Ahora, oriente la discusión con las siguientes preguntas: *¿Cuáles son las variables independiente y dependiente de la situación?* La variable independiente es el perímetro para el triángulo o la cantidad de alambre para la cerca del terreno triangular y la variable dependiente es la longitud del triángulo equilátero o la longitud del terreno de

forma triangular. *¿Cómo cambian los datos entre la variable independiente y la variable dependiente?* La relación entre los valores de las coordenadas de un punto es que  $y$  es 3 veces mayor que  $x$ . *¿Es lo mismo en cada punto?* Esta relación la cumplen todos los puntos. *¿Es posible establecer una relación o una operación para obtener el valor de la coordenada  $y$  a partir de la coordenada  $x$ ?* Si se multiplica cada valor de  $x$  por **3** se obtiene  $y$ .

Explique a los estudiantes que cuando una situación presenta el comportamiento de magnitudes proporcionales o **variación proporcional directa**, su modelo es una **función lineal** que se representa de la forma  $f(x) = ax$ , donde  $a$  es la constante de proporcionalidad directa y es la que indica la razón de cambio de los valores de  $y$  con respecto a  $x$ .

Para evaluar y cerrar la sesión, coloque a los estudiantes la siguiente situación:

**Situación 2:** Elabore la tabla de las siguientes funciones, determine la constante de proporcionalidad y analice cuál es el dominio y el rango de cada una de ellas:

1.  $f(x) = x$
2.  $g(x) = 2x$
3.  $h(x) = -2x$
4.  $i(x) = 3x$
5.  $j(x) = -3x$

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes determinen funciones afines.

#### Materiales:

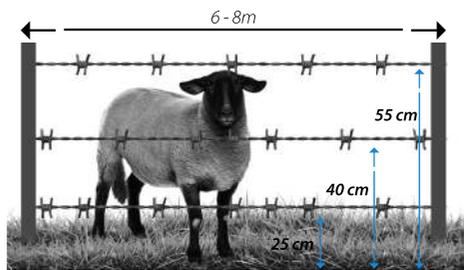
- Lápiz y hojas de papel.
- Fotocopia de la situación.
- Una calculadora.

Solicite el material con anterioridad a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice grupos de 3 estudiantes cada uno. Ahora mencióneles que se va a resolver la siguiente situación:

**Situación 1:** Se sabe que en una cerca para ovejas, la primera fila de alambre está a 25 cm del piso, y luego se colocan filas de alambre dejando una distancia entre ellas de 15 cm.



Ovejas

¿Cómo modelar esta situación a través de una fórmula?

Permita que cada uno de los grupos trate de resolver el problema. Recolecte evidencias de la forma de definir las variables. Luego, cada uno de los grupos escribe en el tablero su respectiva fórmula. Organice una puesta en común orientada con la siguiente pregunta: *¿Cuál es la fórmula correcta?* Apruebe respuestas donde se mencione que ensayando la fórmula que verifique si va una alambrada, la altura que se tiene es de 25 centímetros, si van dos alambradas la altura es de 40 centímetros, si van tres alambradas la altura es de 55 centímetros. Invite a cada uno de los grupos que constaten si las fórmulas de los gru-

pos dan el resultado, ya que es posible que la mayoría de las expuestas por los estudiantes sea  $f(x) = 15x$ ,  $f(x) = 25x$ , entonces ninguna sirve. Realice las siguientes preguntas para que los estudiantes mejoren el planteamiento de su fórmula: *¿Qué es lo que permanece constante cuando se agrega una alambrada más a los postes?* La constante es 15 cm que se mantienen luego de la primera alambrada y cada vez que se aumenta una alambrada más. *¿Cuál expresión matemática representa esa idea?* Valide  $15x$ , que si se verifica para la primera fila, da 15 cm de altura y no 25 cm. Ahora, la primera alambrada aparece a los 25 cm del suelo, eso significa que partimos de un valor que corresponde a 25 cm, ¿cómo usamos este dato?, ¿será que esto nos arregla el inconveniente? De un tiempo prudencial y ayúdelos diciéndoles que se puede indicar como un valor que se le suma a la expresión  $15x$ . Ayúdeles a perfeccionarla como  $f(x) = 15x + 25$ , pero tiene un problema y es que no da los resultados, puesto que no corresponde a la altura de la cerca con el número de filas de alambrada, porque cuando es 1 nos da y este corresponde a la segunda alambrada. *¿Qué se hace para arreglarla?* La respuesta es uno menos, *¿Cómo expresar matemáticamente esa idea de "uno menos"?* Se expresa como  $x - 1$ ; entonces, *¿cómo queda la fórmula ajustada?*  $f(x) = 15(x - 1) + 25$  y el dominio son los números naturales mayores e iguales a 1.

Invite a los grupos a realizar las operaciones indicadas para que nos quede una expresión equivalente a:

$$f(x) = 15x + 10 \text{ donde } x \geq 1 \text{ y } x \in \text{naturales}$$

Luego sugiera a los grupos verificar la fórmula a través de una tabla desde 1 hasta 10 alambradas para determinar la altura de la cerca. Recolecte evidencias de la forma como sustituyen los valores de en la fórmula y operan con éstos para obtener un resultado; quizás es necesario que aclare cómo usar la calculadora o el programa para determinar los valores que se buscan.

## SEMANA 3

Ahora, a cada uno de los grupos entregue la siguiente situación:

**Situación 2:** Cada una de las imágenes muestra las características técnicas de las cercas con alambre que se necesitan para encerrar esos animales. ¿Cuál es la fórmula que relaciona el número de alambradas con respecto a la altura de la cerca que le corresponde a cada animal?

The image contains three diagrams of wire fences, each with a different animal and specific dimensions. The first diagram, labeled 'Cerdos', shows a pig in a fence with a horizontal dimension of 6-8m and two vertical strands at 25cm and 50cm. The second diagram, labeled 'Caballos', shows a horse in a fence with a horizontal dimension of 8-10m and two vertical strands at 55cm and 100cm. The third diagram, labeled 'Vacas', shows a cow in a fence with a horizontal dimension of 8-10m and two vertical strands at 45cm and 80cm.

Invite a los grupos que constaten si todas las fórmulas para calcular las alturas, según el número de alambradas, ¿tienen la forma? Exíjales que justifiquen la respuesta. Luego, que realicen la fórmula de cada alambrada y verifiquen los datos respectivos. Así mismo, proponga que comprueben si estas fórmulas son de la forma  $ax + b$ .

Exija que los grupos contesten las siguientes preguntas: ¿Podemos considerar estas fórmulas como funciones, por

qué?, y, ¿todas las situaciones tienen la misma estructura de las fórmulas? Las respuestas de los estudiantes tienen que mostrarle que comprenden que cada uno de los valores del dominio sí tiene una imagen única y que todas las funciones tienen el formato  $f(x) = ax + b$ .

Para cerrar la sesión coloque la pregunta de la semana y que escriban cómo lo desarrollado en la semana contribuye a la situación problema.

# ¿Cómo representar las variaciones de la cantidad de material que se requiere para armar las cercas?

## ! IDEAS CLAVE:

- Características de las representaciones de las funciones lineales.
- Características de las representaciones de las funciones afines.
- Los procesos de interpolación y extrapolación para encontrar datos.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Determino las características de las representaciones de las funciones lineales.
- Ejercito algunos procedimientos estandarizados para determinar la expresión algebraica de una función.
- Explico la relación que existe entre una función lineal y una función afín.

## Primera sesión

*Las funciones lineales se asocian a situaciones de proporcionalidad que se representan gráficamente como una recta que pasa por el punto  $(0,0)$  y su fórmula o ecuación es  $y = mx$  o  $f(x) = mx$  donde  $m$  es la constante de proporcionalidad que muestra la forma en que una variable se relaciona con otra y a la vez es la pendiente de la recta o la que indica la inclinación.*

*Cuando se construye una recta es importante asociarla a ideas geométricas como "por dos puntos pasa una recta".*

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes establezcan las características de las funciones lineales a través de sus representaciones.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Anotaciones realizadas de la sesión anterior.
- Una regla graduada.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.
- Una calculadora.

Se le sugiere al docente elaborar las gráficas parecidas a las que se muestran con la ayuda de un programa o un simulador que se encuentre en la red como *Geogebra* o *Grpmathica*, entre otros. Igualmente si se le facilita en la escuela que cada grupo tenga un computador o una calculadora graficadora con algún programa como *Excel*, *Derive* o *Math*, ya que puede adaptar mejor esta actividad.

**Desarrollo Propuesto:**

Establezca grupos de cuatro estudiantes. Indíqueles que revisen los apuntes relacionados con la función lineal y qué se elaboren una lista de dudas. Ahora, invite a los grupos a qué escriban la duda más importante en el tablero. Recolecte evidencias de estas preguntas y solicite a los estudiantes que las anoten y que se tengan en cuenta para darle respuesta en el desarrollo de las sesiones de esta semana.

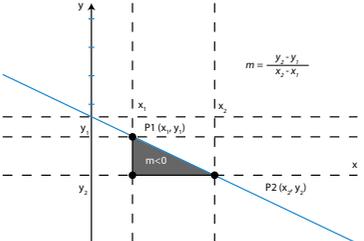
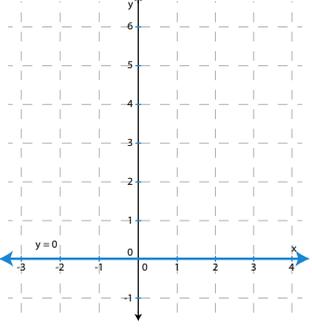
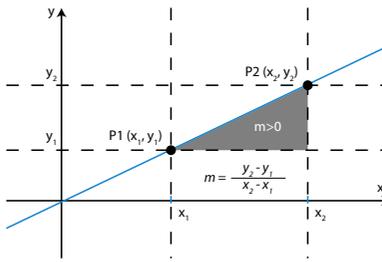
Ordene a los grupos que realicen las gráficas de las funciones tratadas la semana anterior, las cuales eran:

$f(x)=x$     $g(x)=2x$     $h(x)=-2x$     $i(x)=3x$     $j(x)=-3x$

Ahora, cada uno de los grupos realiza sus gráficas en una cartelera y las exhiben de tal forma que todos las puedan

ver. Organice el salón para que se puedan discutir las siguientes preguntas: *¿Qué es lo que indica el número que acompaña a la variable independiente?* Es una constante, una razón entre los valores de **y** con respecto a **x**, o es la inclinación. *¿Qué le hace ese número a la recta?* Le da la inclinación a la recta. *¿Qué pasa con las gráficas que tienen el valor opuesto?* Las gráficas se cortan y son simétricas con respecto al eje **y**. *¿Cuál es el número que acompaña a la variable de **x** cuando la función es  $f(x)=x$ ?* En este caso el número que acompaña a la **x** es el 1.

Luego, realice las aclaraciones al respecto de que la letra **m** en la expresión algebraica  $f(x)=mx$  representa la constante de proporcionalidad, una razón o tasa de cambio y/o la inclinación de la recta. Así mismo declare y use ejemplos sobre la variación de los datos de acuerdo a la pendiente de la recta:

<p>Si <math>m &lt; 0</math>, la pendiente tiene un valor negativo.</p>  <p>La función es decreciente porque si <math>I = (x_1, x_2)</math> y <math>x_1 &lt; x_2</math>, entonces la variación de la función en el intervalo, es decreciente si <math>f(x_2) - f(x_1) &lt; 0</math></p>	<p>Si <math>m = 0</math>, a pendiente es igual a cero.</p>  <p>La función es constante, porque si <math>I = (x_1, x_2)</math> y <math>x_1 &lt; x_2</math> y entonces la variación de la función en el intervalo, es constante si <math>f(x_2) - f(x_1) = 0</math></p>	<p>Si <math>m &gt; 0</math>, la pendiente tiene un valor positivo.</p>  <p>La función es creciente, porque si <math>I = (x_1, x_2)</math> y <math>x_1 &lt; x_2</math> y entonces la variación de la función en el intervalo, es creciente si <math>f(x_2) - f(x_1) &gt; 0</math></p>
---	---	---

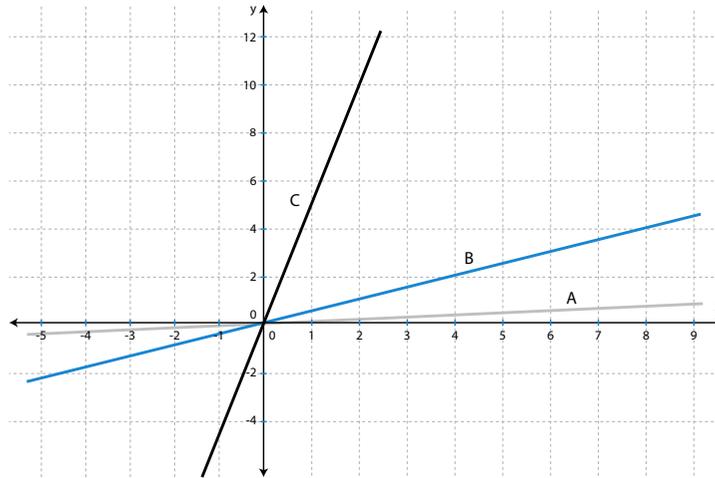
Aclare que para determinar la pendiente de cualquier recta se requiere tener dos puntos cualesquiera,  $P1(x1,y1)$  y  $P2(x2,y2)$  y , para calcular la pendiente como una razón o cociente, simbólicamente se representa así:

Para cerrar la sesión, coloque la siguiente situación para evaluar:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\text{Variación vertical}}{\text{Variación horizontal}}$$

**Situación 1:**

¿Cuál es la recta que tiene el mayor valor de la pendiente? Justifique su respuesta.



## Segunda sesión

Las funciones afines  $f(x) = mx + b$  son rectas que cortan al eje y en un punto distinto a cero (que es lo que indica el parámetro  $b$ ); y se llaman afines porque se asocian a una función lineal  $mx$ .

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes determinen procedimientos para encontrar las gráficas y los parámetros de las funciones afines.

#### Materiales:

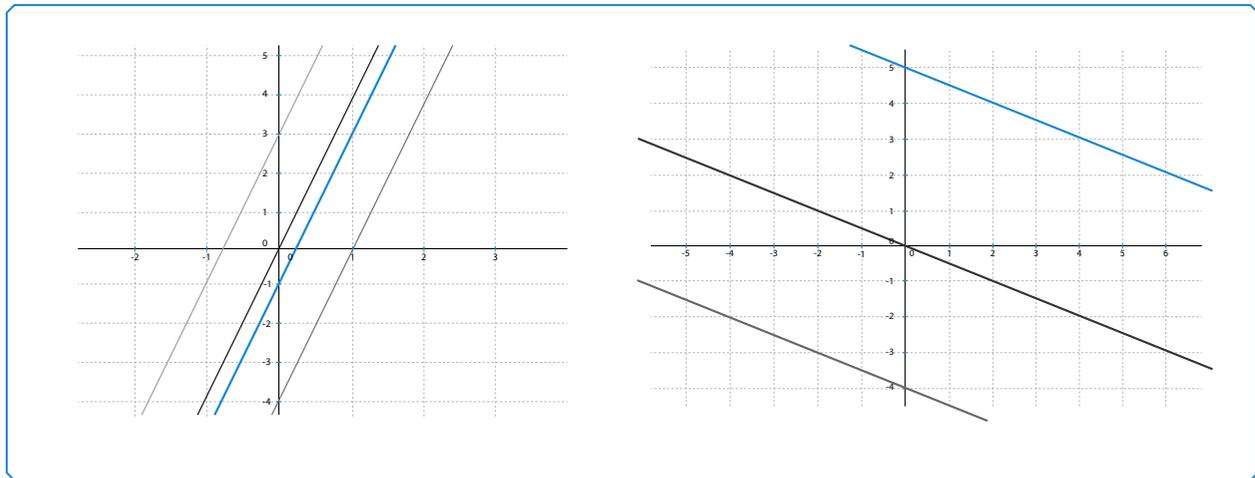
- Hojas de papel y lápiz.
- Anotaciones realizadas de la sesión anterior.
- Una Regla graduada.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.

Solicite el material con anterioridad a los estudiantes. Se le sugiere al docente elaborar las gráficas parecidas a las que

se muestran con la ayuda de un programa o un simulador que se encuentre en la red como *Geogebra* o *Graphmatica*, entre otros. Igualmente si se le facilita en la escuela que cada grupo tenga un computador o una calculadora graficadora con algún programa como *Excel*, *Derive* o *Math*, ya que puede adaptar mejor esta actividad.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice los mismos grupos de la sesión anterior, y muéstrelas las siguientes gráficas:



Pregúnteles: *¿Cómo son las pendientes de las funciones gráficas y elaboradas en cada plano cartesiano?* Las respuestas que den los estudiantes son las suposiciones que se van a validar. Ahora, cada uno de los grupos determina el valor de la pendiente y la fórmula de cada una de las funciones. Quizás las respuestas de los estudiantes, al contrastar lo supuesto con los datos, sean distintas y descubran en cada una que los valores de las pendientes son iguales y lo que cambia es el punto de corte de la recta con en el eje **y**.

*Existen varias maneras de nombrar la ecuación, la fórmula o la expresión algebraica que se asocia a una función. Independiente de la que se use, es necesario que emplee la misma palabra para nombrar esta representación. Si la usa indistintamente es posible que el estudiante piense que son tres representaciones distintas y se genere errores como decir que la ecuación es la función; ambos son dos objetos matemáticos de naturaleza distinta.*

Invite a los grupos a compartir sus funciones:

**Del primer plano cartesiano**

$f(x) = 4x$   
 $g(x) = 4x - 1$   
 $h(x) = 4x + 3$   
 $p(x) = 4x - 4$

**Del segundo plano cartesiano**

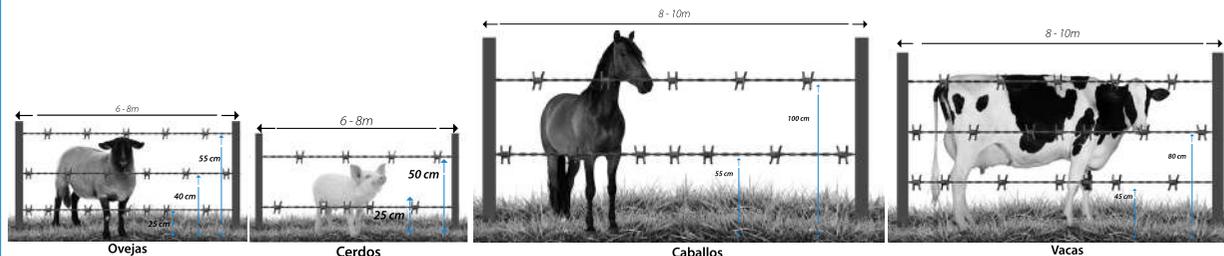
$f(x) = -0.5x$   
 $g(x) = -0.5x - 4$   
 $h(x) = -0.5x + 5$

Pregúnteles: *¿Cómo son las pendientes de cada una de las gráficas?* En el primer plano cartesiano, todas las funciones tienen la misma pendiente cuyo valor es 4; y en el segundo plano cartesiano, todas las funciones la misma pendiente cuyo valor es -0.5. *¿Si tienen la misma pendiente porque no tienen la misma recta?* Los estudiantes tienen que mostrar que son paralelas pero que al comparar con la recta que pasa con el punto (0,0) lo que se modifica es el punto de corte con el eje **y**. *¿Qué hace el valor numérico que acompaña la expresión  $mx$ ?* Representa la ordenada del punto de corte de la recta con respecto al eje y que corresponde a las coordenadas (0, b)

Permita que los estudiantes concluyan que las funciones de la forma  $y = mx + b$  representan rectas que son paralelas a la recta de la función donde , en ambas funciones, es el mismo valor. Explíqueles que la función de la forma  $y = mx + b$  se llama **función afín** porque se asocian a una función lineal.

Luego, invite a los estudiantes a que representen las gráficas que corresponden a la situación de las cercas de los animales tratadas la semana anterior.

**Situación 2:** Cada una de las imágenes da las características técnicas de las cercas con alambre que se estiman para esos animales. ¿Cuál es la fórmula que relaciona el número de alambradas con respecto a la altura de la cerca que le corresponde a cada especie?



Indíqueles a los grupos que las respuestas de las anteriores situaciones van elaborarlas en el papel periódico de tal forma que se representen todas en el mismo plano cartesiano. Así mismo, dídeles que escriban las posibles respuestas a las preguntas que se determinaron al inicio de la semana. Luego, permita que los grupos realicen las correspondientes aclaraciones y apreciaciones que se encuentran de las gráficas, entre ellas, declare que deben ser puntos que tienen una linealidad y que para su estudio se realiza una línea continua. Ahora realice los siguientes cuestionamientos: *¿Qué significado tiene la intersección entre ellas?* Valide enunciados que muestren que en ese punto se determinan el mismo número de filas de alam-

brada y la misma altura de la cerca, luego es preciso que respondan a lo siguiente: *¿Cuál es la cerca que tiene más altura?, ¿cuál es la cerca que tiene menos altura? y ¿cuál es la cerca que tiene más altura si se va hasta la fila 6 de alambrado?*, entre otras que puedan surgir. Recolecte evidencias de las respuestas para que verifique si los estudiantes pueden inferir información a partir de una gráfica y determinar diferencias entre diferentes funciones asociadas a una situación.

Para evaluar y cerrar la sesión, invite a los grupos a escribir las diferencias entre las funciones lineales y las funciones afines. Recolecte evidencias de esta información para utilizarla en la semana 7.

*A partir de los desempeños propuestos en las semanas 1, 2, 3 y 4, y las evidencias de las actividades desarrolladas, analice tanto la información para determinar el alcance de los aprendizajes que han tenido los estudiantes, así como las dificultades y diseñe las estrategias que permitan promover el mejoramiento.*

# ¿Cuánto varía el tamaño de los terrenos a cercar?



## IDEAS CLAVE:

- Modelación de situaciones con las funciones cuadráticas.
- Características de las funciones cuadráticas.



## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Caracterizo la función cuadrática.
- Explico las características de la función cuadrática.
- Utilizo las tablas y gráficas para resolver problemas.

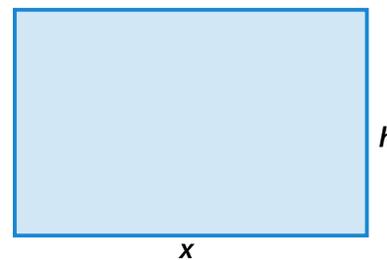
## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes resuelvan una situación e identifiquen características de la función cuadrática.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación.
- Hojas de papel y lápiz.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.



Solicite el material con anterioridad a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice grupos de tres estudiantes. A cada grupo se le entrega la siguiente situación:

**Situación 1:** Representen una función, a partir de la longitud de la base, el área de un rectángulo cuyo perímetro es de 24 metros.

- ¿Cuáles son las medidas del terreno que tienen mayor área?
- Determinen la cantidad de alambre que requiere la cerca, en cada uno de los terrenos que se definen.

De un tiempo prudencial para que los estudiantes resuelvan la situación y paralelamente recolecte evidencias de la forma de resolver el problema. Organice una puesta en común de la forma de resolver la situación y oriente la discusión con las siguientes preguntas: *¿Cómo podemos representar la situación?* Quizás un estudiante dibuje un rectángulo y defina, como variables, la medida del largo y la medida del ancho. *¿Cómo se relacionan esas variables?* Teniendo en cuenta que el perímetro se entiende como la suma de la longitud de los lados y al área como la multiplicación del valor de la base por el valor de la altura, la relación de variables estriba en que la base y la altura co-

responden a medidas de los lados de rectángulo que se usan como variables para calcular el perímetro como el área. ¿Cómo se pueden representar esas dos ideas matemáticas? Para el perímetro  $P(x, h) = x + x + h + h = 2x + 2h$  y para el área  $A(x, h) = x \cdot h$ . ¿Cuántas variables independientes tienen cada expresión? En ambas se tienen dos variables independientes que son la altura ( $h$ ) y la base ( $x$ ). ¿Es posible determinar estas expresiones en términos de una variable? Es necesario que el estudiante vuelva a leer el problema y verifique que el perímetro en todos los casos es 24 metros, entonces la función 'perímetro' se convierte en ecuación cuando se iguala a 24, y se expresa  $2x + 2h = 24 \rightarrow 2(x + h) = 24 \rightarrow x + h = 12 \rightarrow h = 12 - x^2$

¿Cómo utilizar la expresión  $h = 12 - x$  para determinar el área? Valide las respuestas que mencionen que se reemplaza el valor de la altura en la fórmula del área, así:

$$A(x, h) = x \cdot h \rightarrow f(x) = x \cdot (12 - x) \rightarrow 12x - x^2$$

Cada uno de los grupos elabora la tabla y la gráfica correspondiente a esa fórmula para reconocer la variación del área a medida que cambia la longitud de la base. Después, cada uno de los grupos realiza una cartelera con sus gráficas y tablas donde muestra sus respuestas a las preguntas, entre esas, el máximo valor del área es de  $36m^2$  cuando el valor de la base es  $x = 6$ . Con relación a la cantidad del alambre requerido siempre es 24 metros porque el perímetro es constante.

Explíqueles que este tipo de funciones se denominan **funciones cuadráticas** y que su gráfica define una curva que se conoce como **parábola**. Indique a los estudiantes qué describan características de su gráfica y su fórmula; después dé un tiempo prudencial para que los estudiantes analicen y lleguen a conclusiones que se asemejan a: 1) Tiene un punto máximo. 2) Se puede determinar que existen dos valores del dominio que tienen la misma imagen. 3) Se forma una 'montañita'. 4) Se puede determinar una mitad o un eje de simetría. 5) La fórmula tiene una expresión  $x^2$ .

Con los enunciados establecidos determine que esa mitad es conocida como **eje de simetría** o eje de la parábola, que se representa con la expresión  $x = 6$  y que el punto máximo de la montaña es llamado **vértice de la parábola** que es el punto de intersección del eje de simetría y la parábola, cuyas coordenadas son (6,36). Expresé su definición formal:

Las **funciones cuadráticas** son aquellas cuya expresión es un polinomio de segundo grado, esto es, funciones de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales y su representación gráfica corresponde a una parábola.

Para cerrar la sesión, invite a los estudiantes a elaborar la gráfica de una situación similar pero el perímetro del terreno rectangular es de 12 metros; que comparen esta gráfica con la anterior construida. Además, que realicen anotaciones sobre lo que se aprendió.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes modelen situaciones con la función cuadrática.

#### Materiales:

- Fotocopia de las situaciones.
- Hojas de papel y lápiz.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.

Solicite el material con anterioridad a los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice cuatro grupos y a cada uno se le entrega una de las siguientes situaciones:

#### Situación 1:

Una empresa de telefonía gasta en publicidad miles de pesos que se modelan con la siguiente fórmula:

$$P(x) = 5000 + 1000x - 4x^2$$

Donde es la cantidad de dinero que la empresa gasta en publicidad.

- Determinen una tabla de datos.
- Elaboren una gráfica.
- Encuentre el valor máximo de beneficio en publicidad.

## Situación 2:

En la sección de un hipermercado se venden 21 toallas por día cuando el precio ofrecido es de \$5600. Las ventas aumentan en 4 toallas por día cada vez que se coloca una oferta rebajando el precio en \$400.

- Obtengan la función que modele la situación planteada, representando con  $x$  el número de rebajas que deben disponerse y  $f(x)$  la ganancia obtenida por la venta de este artículo.
- Determinen el precio a que debe el hipermercado ofrecer las toallas para maximizar las ganancias diarias por la venta de este artículo.
- Elaboren una gráfica.

## Situación 3

La base de un triángulo es 5 unidades más que su altura.

- Determinen la función que modele el área en términos de la altura.
- Elaboren una tabla de datos.
- Elaboren una gráfica.
- Encuentren el valor de la altura que hace que el área sea el valor máximo.

## Situación 4

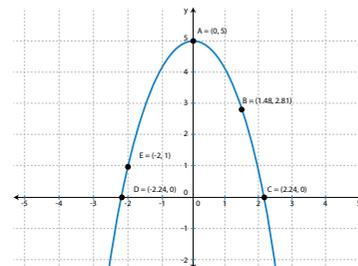
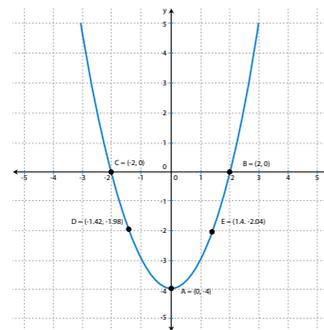
La suma de dos números es 36.

- Determinen la función que modele la multiplicación de esos números por el número de menor valor.
- Elaboren una gráfica.
- Encuentren el valor máximo que puede tener los números.

Los grupos las resuelven y exponen, en carteleras, sus procedimientos y representaciones. Recolecte evidencias de los procedimientos efectuados para definir las variables, los procesos de sustitución que se requieren, las tablas y las gráficas. Pruebe entre los estudiantes la validación de los procedimientos, de las explicaciones sobre la pertinencia de las respuestas y cómo estas ayudan a estudiar cada una de las situaciones.

Además, oriente la discusión con: **¿Cuáles son las características de las situaciones para modelar con una función cuadrática?** Exíjales que justifiquen sus afirmaciones. Paralelamente, elabore en el tablero las características que cumplen las funciones cuadráticas y las características de las situaciones.

Para cerrar la sesión y como actividad de evaluación, cada uno de los estudiantes tiene que generar una situación por cada una de las gráficas que se presentan a continuación:



Además, solicite a los estudiantes que escriban el aporte que dan estas actividades a la pregunta establecida para la semana y para la pregunta formulada para la secuencia.

# ¿Cómo representar variaciones del tamaño de los terrenos a cercar?

## ! IDEAS CLAVE:

- Algunos significados de los parámetros de las funciones cuadráticas.
- La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.
- Características de las traslaciones de las parábolas.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Determino las características de las parábolas.
- Establezco relaciones entre las diferentes representaciones de la función cuadrática.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes realicen conjeturas de las acciones que efectúan en la gráfica y comprendan los parámetros de la fórmula de las funciones cuadráticas.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Una calculadora.
- Cinta de enmascarar.
- Una regla graduada.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.

Solicite a los estudiantes con anterioridad el material y se le sugiere al docente elaborar las gráficas parecidas a las que se muestran con la ayuda de un programa o un simulador que se encuentre en la red como *Geogebra* o *Graphmatica*, entre otros. Igualmente si se le facilita en

la escuela que cada grupo tenga un computador o una calculadora graficadora con algún programa como *Excel*, *Derive* o *Math*, ya que puede adaptar mejor esta actividad.

#### Desarrollo Propuesto:

La función  $y = ax^2$  tiene las siguientes propiedades: 1). Su dominio es el conjunto de los números reales: **Dom  $f = \mathbb{R}$** . 2). La función es **continua**. 3). El punto  **$V = (0, 0)$**  es el **vértice de la parábola**. Por otro lado, la parábola, que es la gráfica, presenta las siguientes características: 1). Si  $a > 0$ , la parábola está abierta hacia arriba y si  $a < 0$ , la parábola está abierta hacia abajo. 2). Si  $|a| > 1$ , la parábola es más estrecha y si  $|a| < 1$ , la parábola es más ancha que la de 3). El eje de simetría respecto del eje de ordenadas hace que se considere función par.

Se organizan grupos de 3 estudiantes. Coloque la siguiente situación:

**Situación 1:**

A partir de la gráfica de la función  $y = x^2$ , obtengan las gráficas de las siguientes funciones y realicen las explicaciones correspondientes.

a).  $y = 2x^2$

b).  $y = 5x^2$

c).  $y = 0.5x^2$

d).  $y = 0.4x^2$

e).  $y = -5x^2$

f).  $2x^2$

Recolecte evidencias de la forma en que los estudiantes realizan los cálculos para algunos valores, prestando especial atención en las dificultades que ellos presentan con el manejo de  $(-3)^2$ , ya que ellos multiplican y les da 6 o colocan el signo -9. En esos casos, es necesario realizar las aclaraciones con respecto a la potenciación y a las operaciones con los números enteros. Existe otro error; cuando aparece  $5(-1)^2$  ellos multiplican 5 y (-1) y el resultado lo elevan al cuadrado; en ese caso el estudiante no maneja la jerarquía de operaciones. Es importante que usted reconozca que estos errores se deben a lo que el estudiante maneja del sistema algebraico; una forma de solventarlo es permitiendo que usen calculadora o se apoyen de un programa para realizarlos.

Invite a los grupos a que escriban una conjetura sobre la forma como abre la parábola de acuerdo al número que acompaña a  $x^2$  y que la justifiquen. Luego, indíqueles que elaboren una cartelera sobre su conjetura. Organice el salón para que todos peguen sus carteleras y puedan ser observadas. Oriente la discusión con las siguientes preguntas: *¿Cuánto vale  $a$  cuando todas las gráficas se comparan con la función  $y = x^2$ ? Vale 1. ¿Qué sucede con la parábola si  $a$  es mayor a 1? En la mayoría de las gráficas abre hacia arriba y su parábola es más estrecha o está incluida en la gráfica  $y = x^2$ . ¿Qué sucede con la parábola si  $a$  es menor a 1? Las parábolas abren hacia*

abajo. *¿Cómo se determina que la parábola es estrecha o ancha a partir del parámetro " $a$ "? Se define más ancha cuando el valor de  $a$  está en  $-1 < a < 1$ . En caso contrario  $a > 1$  y  $a < -1$ . Trate que la discusión llegue a estas conclusiones entre ellos, sin intervenir usted, solo guíe a los estudiantes a que realicen la validación desde sus construcciones. Ahora, indíqueles que revisen sus conjeturas y que las complementen.*

A continuación que contesten la siguiente pregunta: *Si se le agrega o se le resta un número a la expresión que tiene  $ax^2$ , ¿qué pasa con la parábola? Sugiera a los estudiantes que comprueben sus suposiciones. En caso que no entiendan, escriba un ejemplo  $x^2 + 1$ , e indíqueles que realicen un plan para comprobar sus suposiciones y que lo justifiquen. Luego, cada uno de los grupos muestra a los otros la conjetura y su correspondiente plan de comprobación para que establezcan la misma estrategia. Dé un tiempo prudencial para que los grupos ejecuten su plan y permita que se compartan sus acercamientos a lo que mencionaron como conjetura. Paralelamente, valide ideas que se relacionan con:*

Las **funciones cuadráticas** del tipo  $y = ax^2 + p$  son **parábolas** cuyo **vértice** es el punto  $V = (0, p)$ ; se obtienen trasladando verticalmente  $p$  unidades la gráfica de  $y = ax^2$ . Si  $p > 0$ , la traslación vertical es **hacia arriba** y si  $p < 0$ , la traslación vertical es **hacia abajo**.

Para cerrar la sesión, coloque la siguiente situación para evaluar de forma individual:

**Situación 2:** Se tiene un terreno rectangular de 30 metros de perímetro para cercar, y se asigna 6 metros cuadrados del total del perímetro para colocar la comida de los animales. ¿Cuál es el área máxima que podría tener el terreno rectangular y que tenga ese perímetro?

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes determinen otras traslaciones de la gráfica de las funciones cuadráticas.

**Materiales:**

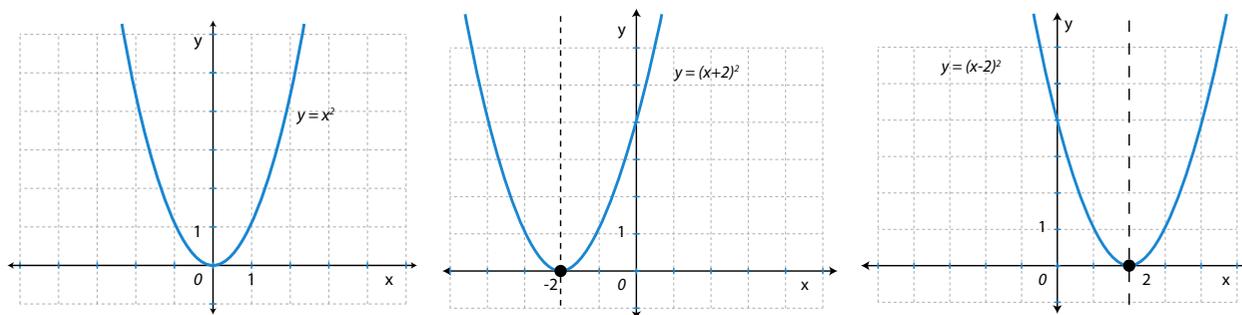
- Hojas de papel y lápiz.
- Una calculadora.
- Cinta de enmascarar.
- Una regla graduada.
- Un pliego de papel periódico o craft.
- Marcadores.

un simulador que se encuentre en la red como *Geogebra* o *Graphmatica*, entre otros. Igualmente si se le facilita en la escuela que cada grupo tenga un computador o una calculadora graficadora con algún programa como *Excel*, *Derive* o *Math*, ya que puede adaptar mejor esta actividad.

**Desarrollo Propuesto:**

Solicite el material con anterioridad a los estudiantes. Se le sugiere al docente elaborar las gráficas parecidas a las que se muestran con la ayuda de un programa o

Se organizan los mismos grupos de la sesión anterior. Se les solicita a cada uno de los grupos que comparen las parábolas correspondientes a las funciones  $y = (x+2)^2$  y  $y = (x-2)^2$  con la parábola de la función  $y = x^2$



Cada uno de los grupos intercambia sus observaciones que se relacionan con un traslado de la función  $y = x^2$  en forma horizontal sobre el eje  $x$ . En el caso de  $y = (x+2)^2$  la gráfica se mueve dos unidades a la izquierda sobre el eje  $x$  y en el caso de  $y = (x-2)^2$  la gráfica se mueve dos unidades a la derecha sobre el eje  $x$ . Pregúnteles: *¿Qué sucede*

*con las coordenadas de los puntos de cada una de las parábolas?* En ese caso, también se modifican dos unidades a la izquierda en el primer caso y dos unidades a la derecha en el segundo caso. Luego, invite a los grupos a que realicen las siguientes situaciones teniendo en cuenta las anteriores observaciones:

**Situación 1:** Realicen un bosquejo de la gráfica en cada uno de los casos y justifiquen las respuestas.

a)  $f(x) = (x - 3)^2$

b)  $g(x) = (x + 4)^2$

c)  $f(x) = (x - 2)^2$

**Situación 2:** Completen la tabla en cada uno de los casos, y sin realizar los cálculos, apliquen el acuerdo establecido:

Traslación horizontal	No hay traslado	2 unidades a la izquierda	3 unidades a la derecha	4 unidades a la izquierda
Función	$y = 0.5x^2$			

Recolecte evidencias de las discusiones de los grupos y pídale que determinen si lo establecido anteriormente se cumple en estas situaciones. Realice las siguientes preguntas: *¿Cómo determino el eje de simetría en estos casos?*, *¿cómo determino el vértice en estos casos?* y *¿es lo mismo cuando la parábola abre hacia abajo?* Solicite a los estudiantes que expongan sus procedimientos y que realicen aclaraciones si otros compañeros lo requieren. Valide que:

Las **funciones cuadráticas** del tipo  $y = a(x + h)^2$  son **parábolas** cuyo **vértice** es el punto  $V = (-h, 0)$ . Se obtienen trasladando horizontalmente  $h$  unidades de la gráfica  $y = ax^2$ . Si  $h > 0$ , la traslación horizontal es **hacia la izquierda** y si  $h < 0$ , la traslación horizontal es **hacia la derecha**.

Indíqueles ahora, *¿qué se requiere si se quiere definir un desplazamiento oblicuo de la parábola?* En ese caso explique a los estudiantes que implica componer la traslación horizontal con la traslación vertical, entonces, *¿cómo quedaría la fórmula?* La respuesta es:  $y = a(x + h)^2 + p$ . Este tipo de análisis muestra que los estudiantes comprenden las relaciones de las gráficas con la fórmula. Cabe la siguiente

te cuestión: **¿Cómo podemos escribir un ejemplo con esta estructura?** Permita que los estudiantes escriban tres ejemplos en el tablero e invite a otros a realizar todos los procedimientos algebraicos que se requieren hasta tenerla de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ .

Para cerrar la sesión, coloque la siguiente situación a cada uno de los grupos como evaluación:

**Situación 4:** Realicen los procedimientos necesarios para que la expresión quede de la forma  $y = a(x + h)^2 + p$ . Además determinen el eje de simetría, el vértice y su correspondiente gráfica:

$$y = x^2 - 8x + 19$$

$$y = x^2 - 2x - 1$$

$$y = 4x^2 - 12x + 10$$

Para concluir, cada uno de los estudiantes tiene que contestar la pregunta de la semana. Evaluar lo que aprendieron y analizar en qué forma las actividades contribuyen a la respuesta del problema que orienta la secuencia.

# ¿Cómo describir variaciones del tamaño de cercas para los animales?

## ! IDEAS CLAVE:

- Representaciones tabulares y gráficas correspondientes a las funciones polinómicas.
- Características de la variación de las funciones polinómicas.

## ✓ DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Modeló situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de las funciones polinómicas.
- Establezco la relación entre los cambios en los parámetros con la representación gráfica de las funciones polinómicas.
- Analizo los comportamientos de cambio de las funciones polinómicas.
- Determino las propiedades de variación positiva y negativa entre variables, principalmente de variación lineal, de variación cuadrática y de variación polinómicas.

## Primera sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se comparten dudas y respuestas de cada una de las semanas.

#### Materiales:

- Hojas de Papel y lápiz.
- Anotaciones del cuaderno.

Solicite el material con anterioridad a cada uno de los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Se propone que los estudiantes revisen sus respuestas a las preguntas de cada una de las semanas y sus contribuciones a la pregunta de la secuencia. Así mismo, que examinen la lista de preguntas generadas durante la primera semana y otras que se construyeron en el desarrollo de la secuencia. La invitación es que cada estudiante genere y redacte preguntas para que sean leídas y aclaradas por el grupo. A cada uno

de los estudiantes se le invita a que contesten las preguntas hechas por los otros. En ese caso, particularmente usted puede evaluar y recolectar evidencias de la capacidad argumen-

tativa y manejo conceptual de los estudiantes cuando unos le aclaran a los otros los aspectos a resolver sobre las funciones. Este es un momento adecuado de cierre de la actividad.

### Actividad 2

**En qué consiste:** Se elabora la maqueta de la cerca.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación problema que oriento la secuencia.
- Anotaciones del cuaderno.
- Materiales que designen cada uno de los grupos para la maqueta.

Solicite el material con anterioridad a cada uno de los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice los mismos grupos de la semana 1; y que revisen sus planes y modelos de maqueta de la cerca. Luego, cada uno de los grupos las elabora, las expone y muestra como utilizaron lo visto en la secuencia para construir su maqueta de la secuencia. Este es un momento adecuado de cierre de sesión.

## Segunda sesión

### Actividad 1

**En qué consiste:** Se comparte soluciones de la situación problema que orientó la secuencia.

#### Materiales:

- Fotocopia de la situación problema que oriento la secuencia.
- Anotaciones del cuaderno.
- Un pliego de papel periódico o papel craft.
- Marcadores.

Solicite el material a cada uno de los estudiantes.

#### Desarrollo Propuesto:

Organice tres grupos. Asigne a cada uno de los grupos que elaboren la respuesta a la situación así: Un grupo elab-

borará la respuesta cuando la situación se modela con funciones lineales; otro elaborará la respuesta cuando la situación se modela con funciones cuadráticas y el último elaborará la respuesta cuando la situación se modela por cualquier función polinómicas. Cada grupo realiza las carteleras correspondientes y las expone a los demás. Valide la información que se relaciona con el tipo de gráficas que se generan en cada una de las situaciones y las características de los parámetros. Este es un momento adecuado de cierre de la actividad.

### Actividad 2

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes construyan un mapa conceptual.

**Materiales:**

- Un pliego de papel periódico o papel craft.
- Marcadores.
- Solicite el material a cada uno de los estudiantes.

**Desarrollo Propuesto:**

Cada uno de los estudiantes enuncia palabras que se relacionen con las nociones matemáticas trabajadas durante el desarrollo de la secuencia como: *función, parámetro, plano cartesiano, variación, dominio, rango, continuidad, pendiente, constante de proporcionalidad, función constante, función cuadrática, función lineal, modelación, tabla, expresión algebraica, gráfica, parábola, recta, simetría*, entre otras.

Ahora, organice los mismos grupos de la sesión anterior. Con estas palabras, cada uno de los grupos construye un mapa conceptual. Luego, cada uno lo expone, lo explica y se selecciona el que mejor represente las conexiones con lo trabajado durante la ejecución de la secuencia. Es preciso que los demás estudiantes tomen apuntes del mapa conceptual seleccionado. Complémntelo con las características de una función polinómicas que es aquella de la forma constante  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$  con  $a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$  y  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , llamados coeficientes del polinomio. El dominio le corresponde a todos los números reales y en algunos casos el rango será un intervalo de los números reales o todos los reales. La gráfica de un polinomio es una función continua.

# Cierre y Evaluación

## ! IDEAS CLAVE:

- Aplicación de las funciones polinómicas.



## DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Empleo las características de las diferentes funciones polinómicas.
- Resuelvo problemas que requieren de las funciones polinómicas.

### Primera sesión

#### Actividad 1

**En qué consiste:** Se espera que los estudiantes resuelvan situaciones con la aplicación de funciones polinómicas.

#### Materiales:

- Hojas de papel y lápiz.
- Fotocopia de las situaciones.

#### Desarrollo Propuesto:

Se sugiere que, por parejas, los estudiantes tengan las siguientes situaciones para resolverlas en una hoja:

#### Situación 1:

Un almacén vende aceite en envases de 5 litros. Cobra \$3 000 por el envase y \$2 000 por litro de aceite. ¿Cuánto deberá pagar una señora que compró 3,5 litros y no tenía envase propio?, ¿cuánto aceite máximo puede comprar otra persona que sólo dispone de \$30 000 y tampoco tiene envase?

- Determinen una función y exprésenla como fórmula.
- Construyan la gráfica.

#### Situación 2:

Si se lanza una pelota hacia arriba y se toman los tiempos y la altura alcanzada en el lanzamiento, se obtiene lo siguiente:

<b>Tiempo en segundos</b>	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
<b>Altura alcanzada en m</b>	1	7.26	11	12.25	11	7.25	1	Ya estaba en el suelo

- Determinen la fórmula de la función.
- Construyan la gráfica.

Al finalizar, cada uno de los estudiantes comparte sus respuestas y analizan la calidad de las justificaciones. Oriente la discusión con la pregunta: *¿Para qué sirven las funciones en estas situaciones?* Recolecte evidencias en términos de modelar fenómenos que, a través de la

función, se puede inferir posibles resultados. Ahora, distribuya las pruebas para que otros la evalúen. Dígales que van a escribir recomendaciones para mejorar sus producciones. Este es un momento adecuado de cierre de la sesión.

## Segunda sesión

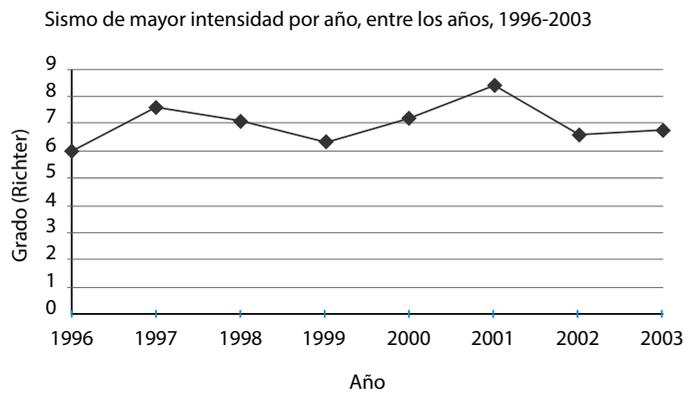
### Desarrollo Propuesto:

Continúe con las siguientes situaciones para que cada pareja las resuelvan:

#### Situación 1:

Observen la siguiente tabla con su respectivo gráfico:

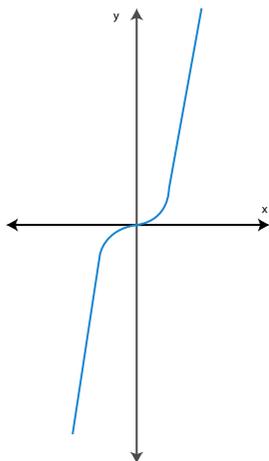
Año	Grado del sismo de mayor intensidad (escala de Richter)
1996	6
1997	7,6
1998	7,1
1999	6,3
2000	7,2
2001	8,4
2002	6,6
2003	6,8



- ¿Cuáles son las dos variables asociadas de la situación?
- ¿Existe una relación de dependencia entre las dos variables asociadas, por qué?
- ¿Cuántos grados en la escala de Richter tuvo el terremoto de mayor intensidad del año 1998?
- ¿Es posible saber cuántos grados tuvo el terremoto de mayor intensidad del año 2005?
- ¿Qué ocurre con el grado del sismo de mayor intensidad, a medida que avanzan los años?
- ¿Se puede saber el grado del sismo de mayor intensidad que habrá en los años venideros?

#### Situación 2:

Se presenta la gráfica de la función cúbica  $f(x) = x^3$  y con base en ella determinen la gráfica de las siguientes funciones:



- $x^3 + 1$
- $x^3 - 4$
- $(x - 2)^3$

Justifiquen las traslaciones que presentaron sus gráficas.

Recoja las producciones de los estudiantes. De nuevo, pregunte sobre las dudas que se les presentaron y busque que

los otros las ayuden a esclarecer, siempre y cuando estas dudas se refieran a lo conceptual trabajado en la secuencia.

## Instrumento para las evaluaciones del aprendizaje

El aprendizaje, relacionado con describir y representar situaciones de variación con funciones polinómicas, se hace evidente cuando los estudiantes reconocen sus características a través de las representaciones en las expresiones algebraicas, tablas y gráficas. En la siguiente tabla se presentan algunas descripciones que permiten valorar algunos de los procesos matemáticos que se evidencian en la secuencia. Esta puede ser utilizada por el docente para determinar el nivel de aprendizaje que logró el estudiante en la ejecución de la secuencia.

REPRESENTACIONES VARIACIÓN POLINÓMICAS	TABLAS	GRÁFICAS	EXPRESIÓN ALGEBRAICA O FÓRMULAS
lineal	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Establece razones internas de una magnitud y corrobora que sea la misma entre las razones internas de otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Determina que al aumentar los valores de una magnitud, también aumentan en la otra magnitud.</li> <li><input type="checkbox"/> Calcula la constante de proporcionalidad como cociente de los datos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Verifica que sea una línea recta la función lineal.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica que la recta pasa por el punto de origen.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica la constante de proporcionalidad con la inclinación o pendiente de la recta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Reconoce la expresión <math>y=mx</math> como función lineal</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica la <math>m</math> como la pendiente o inclinación de la recta.</li> <li><input type="checkbox"/> Asocia la representación gráfica con la algebraica.</li> </ul>
Afín	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Identifica el valor que se le suma en los valores de la imagen.</li> <li><input type="checkbox"/> Reconoce que es el valor que le corresponde a cero.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Verifica que sea una línea recta que no pasa por el origen del plano.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica que la recta interseca a el eje de las ordenadas en el valor <math>b</math> de la expresión <math>ax + b</math></li> <li><input type="checkbox"/> Identifica la constante de proporcionalidad con la inclinación o pendiente de la recta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Reconoce la expresión <math>y=mx + b</math> como función afín.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica la <math>m</math> como la pendiente o inclinación de la recta.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica la <math>b</math> como la ordenada del punto de corte o lo fijo de la recta.</li> <li><input type="checkbox"/> Asocia la representación gráfica con la algebraica.</li> </ul>
Cuadrática	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Identifica, entre los valores, el vértice de la parábola.</li> <li><input type="checkbox"/> Reconoce los valores simétricos en la tabla.</li> <li><input type="checkbox"/> Establece el eje de simetría.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Asocia la parábola como la representación de la función cuadrática.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica el vértice de la parábola.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica el eje de simetría de la parábola.</li> <li><input type="checkbox"/> Relaciona las traslaciones de la parábola vertical, horizontal y oblicua con respecto a <math>y = ax^2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Reconoce la expresión <math>y = ax^2</math> como expresión de la función cuadrática.</li> <li><input type="checkbox"/> Identifica los diferentes tipos de traslación en la expresión <math>y = a(x + h)^2 + p</math></li> <li><input type="checkbox"/> Asocia la representación gráfica con la algebraica.</li> </ul>

## Bibliografía

### GRADO SEXTO

#### BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- CHAMORRO, M. d. (2006). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.
- DICKSON, L., BROWN, M., & GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Labor.
- FRIAS, A., Gil, F., & MORENO, M. F. *Introducción a las Magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud y tiempo*. En A. Frias.
- GARCIA, G., SERRANO, C., & DÍAZ, H. (2002). *La aproximación una noción básica en el cálculo*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerios de Educación Nacional.

### GRADO SEPTIMO

#### BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- GODINO, J. y BATANERO, C. *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Recuperado el 18 de enero de 2013 de: [http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3\\_Proporcionalidad.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf)
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerios de Educación Nacional.
- PERRY, P. GUACANAME, E. y OTROS. *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad, un hueso duro de roer*. Recuperado el 18 enero del 2013 de <http://funes.uniandes.edu.co/671/1/Perry2003Transformar.pdf>

### GRADO OCTAVO

#### BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- GODINO, J. D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Recuperado el 30 de Mayo de 2013, de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. PÁG. 1
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerios de Educación Nacional.

### GRADO NOVENO

#### BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- AZCARATE, C.; CASADEVALL, M.; CASELLAS, E.; BOSCH, D. (1996). *Calculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.
- AZCARATE, C. Y DEULOFEU, J. (1988). *Funciones y gráficas*. Editorial Síntesis. Madrid.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerios de Educación Nacional.

