

Bab 8

ATURAN PENCACAHAN

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

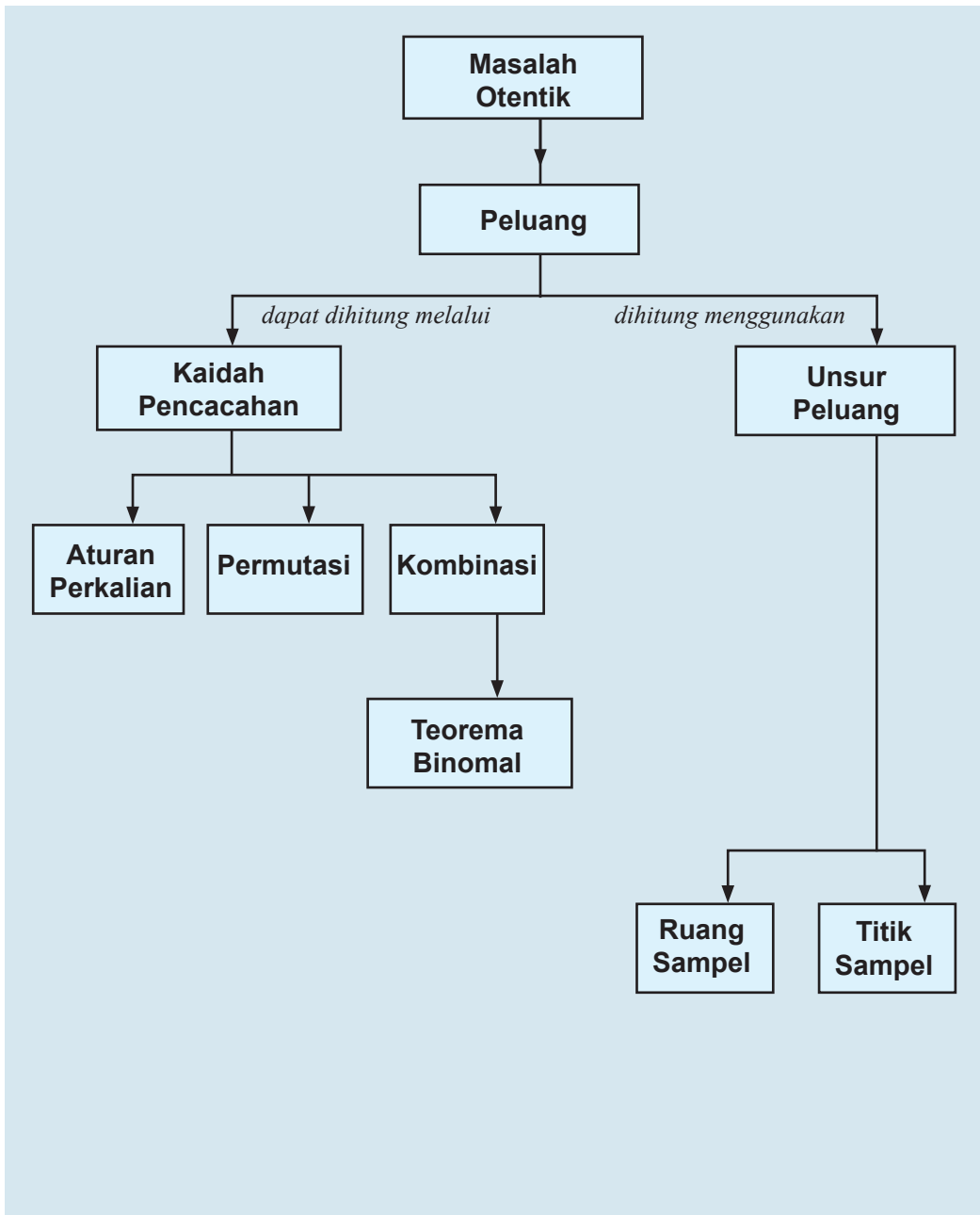
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan dan menerapkan berbagai aturan pencacahan melalui beberapa contoh nyata serta menyajikan alur perumusan aturan pencacahan (perkalian, permutasi dan kombinasi) melalui diagram atau cara lainnya. 3. Menerapkan berbagai konsep dan prinsip permutasi dan kombinasi dalam pemecahan masalah nyata. 4. Mendeskripsikan konsep ruang sampel dan menentukan peluang suatu kejadian dalam suatu percobaan. 5. Mendeskripsikan dan menerapkan aturan/ rumus peluang dalam memprediksi terjadinya suatu kejadian dunia nyata serta menjelaskan alasan-alasannya. 6. Mendeskripsikan konsep peluang dan harapan suatu kejadian dan menggunakannya dalam pemecahan masalah. 	<p>Melalui pembelajaran materi aturan pencacahan, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip aturan pencacahan melalui pemecahan masalah otentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. • Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip aturan pencacahan dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Pencacahan*
- *Permutasi*
- *Kombinasi*
- *Kejadian*
- *Ruang Sampel*
- *Titik Sampel*
- *Peluang*

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none"> Memilih dan menggunakan aturan pencacahan yang sesuai dalam pemecahan masalah nyata serta memberikan alasannya. Mengidentifikasi masalah nyata dan menerapkan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah tersebut. Mengidentifikasi, menyajikan model matematika dan menentukan Peluang dan harapan suatu kejadian dari masalah kontekstual. 	<p>Melalui pembelajaran materi aturan pencacahan, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none"> Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip aturan pencacahan melalui pemecahan masalah otentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip aturan pencacahan dalam memecahkan masalah otentik.

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Pencacahan (Perkalian, Permutasi, dan Kombinasi)

a. Aturan Perkalian

Setiap orang pasti pernah dihadapkan dalam permasalahan memilih atau mengambil keputusan. Misalnya: setelah tamat sekolah akan memilih program studi dan di perguruan tinggi yang mana? Ketika berangkat ke sekolah memilih jalur yang mana. Dalam matematika kita dibantu untuk menentukan banyak pilihan yang akan diambil. Untuk lebih memahami cermati masalah dan kegiatan berikut.



Masalah-8.1

Beni, seorang siswa Jurusan IPA lulusan dari SMA Negeri 1 Tarutung Tahun 2013 ingin menjadi mahasiswa di salah satu perguruan tinggi negeri (PTN) yang ada di pulau Sumatera pada Tahun 2013. Ayah Beni menyetujui cita-cita Beni asalkan kuliah di Medan. Di Medan terdapat PTN dan juga memiliki jurusan yang digemari dan yang dipilih oleh Beni, yaitu Biologi atau Pendidikan Biologi. Panitia SNMPTN memberikan kesempatan kepada calon mahasiswa untuk memilih maksimum tiga jurusan di PTN yang ada di Indonesia. Bantulah Beni untuk mengetahui semua kemungkinan pilihan pada saat mengikuti SNMPTN Tahun 2013?

Alternatif Penyelesaian

Untuk mengetahui semua pilihan yang mungkin, kita harus mengetahui apakah semua PTN di Medan memiliki Jurusan Biologi atau Jurusan Pendidikan Biologi. Ternyata, hanya USU dan Unimed saja yang memiliki pilihan Beni tersebut. USU hanya memiliki Jurusan Biologi, tetapi Unimed memiliki Jurusan Biologi dan Jurusan Pendidikan Biologi.

Sesuai aturan panitia SNMPTN, Beni diberi kesempatan memilih maksimal 3 dan minimal 1 jurusan.

Mari kita uraikan pilihan-pilihan yang mungkin.

Untuk 3 Pilihan

1. Seandainya Beni memilih 3 pilihan tersebut di satu kota, maka pilihannya adalah:

Pilihan 1: Biologi USU

Pilihan 2: Pend. Biologi UNIMED

Pilihan 3: Biologi UNIMED

Untuk 2 Pilihan

1. Beni hanya boleh memilih 2 jurusan di UNIMED, yaitu:
Pilihan 1: Pend. Biologi UNIMED
Pilihan 2: Biologi UNIMED
2. Beni juga memilih 1 jurusan di USU dan 1 di UNIMED, yaitu:
Pilihan 1: Biologi USU
Pilihan 2: Pend. Biologi UNIMED
Atau
Pilihan 1: Biologi USU
Pilihan 2: Biologi UNIMED

Ingat!!!!

Ada strategi memilih jurusan.

Untuk 1 Pilihan

1. Beni boleh hanya memilih Biologi USU.
2. Beni boleh hanya memilih Pend. Biologi UNIMED
3. Beni boleh hanya memilih Biologi UNIMED

Jadi, banyak cara memilih yang mungkin yang dimiliki Beni sebanyak 7 cara.

- Menurut kamu, seandainya tidak ada strategi memilih jurusan, berapa cara yang dimiliki Beni?
- Coba kamu pikirkan, bagaimana pola rumusan untuk menghitung banyak cara yang mungkin untuk Masalah 8.1.

Pernahkah kamu mengikuti pemilihan pengurus OSIS di sekolahmu?

Mari kita cermati contoh berikut, sebagai masukan jika suatu saat kamu menjadi panitia pemilihan pengurus OSIS di sekolahmu.



Contoh 8.1

Pada pemilihan pengurus OSIS terpilih tiga kandidat yakni Abdul, Beny, dan Cindi yang akan dipilih menjadi ketua, sekretaris, dan bendahara. Aturan pemilihan adalah setiap orang hanya boleh dipilih untuk satu jabatan. Berapakah kemungkinan cara untuk memilih dari tiga orang menjadi pengurus OSIS?

Alternatif Penyelesaian

Ada beberapa metode untuk menghitung banyak cara dalam pemilihan tersebut.

i. Cara Mendaftar

Mari kita coba untuk memilih tiap-tiap jabatan, yaitu:

a. Jabatan ketua OSIS

Untuk jabatan ketua dapat dipilih dari ketiga kandidat yang ditunjuk yakni Abdul (A), Beny (B), dan Cindi (C) sehingga untuk posisi ketua dapat dipilih dengan 3 cara.

b. Jabatan sekretaris OSIS

Karena posisi ketua sudah terisi oleh satu kandidat maka posisi sekretaris hanya dapat dipilih dari 2 kandidat yang tersisa.

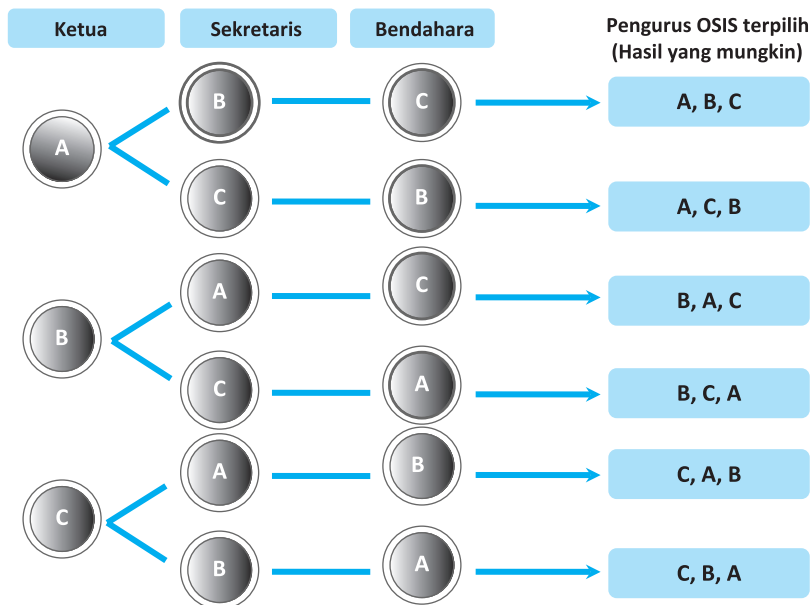
c. Jabatan bendahara OSIS

Karena posisi ketua dan sekretaris sudah terisi maka posisi bendahara hanya ada satu kandidat.

Dari uraian di atas banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih tiga kandidat untuk menjadi pengurus OSIS adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara.

ii. Cara Diagram

Untuk dapat lebih memahami uraian di atas perhatikan diagram berikut.



Gambar 8.1 Diagram Pohon Pemilihan Ketua OSIS

- ♦ Misalnya, Abdul merupakan siswa kelas X, Beny dan Cindy dari Kelas XI. Berapa banyak cara memilih pengurus OSIS jika Bendahara OSIS merupakan siswa dari kelas XI.

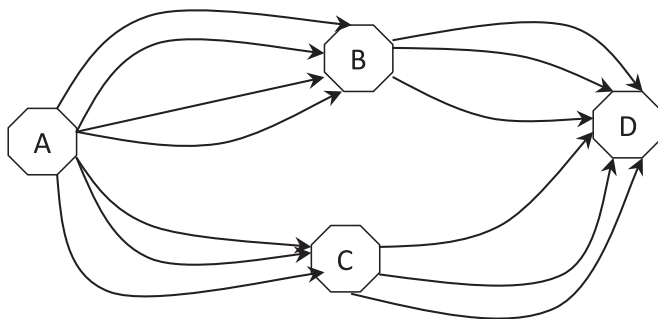
Biasanya di kota-kota besar terdapat banyak jalur alternatif menuju suatu tempat dan jalur ini diperlukan para pengendara untuk menghindari macet atau mengurangi lama waktu perjalanan. Contoh berikut mengajak kita mempelajari banyak cara memilih jalur dari suatu kota ke kota lain.



Contoh 8.2

Dari Kota A menuju Ibukota D dapat melalui beberapa jalur pada gambar 8.1.

Berapa banyak kemungkinan jalur yang dapat dilalui dari Kota A ke Kota D?



Gambar 8.2 Jalur dari Kota A ke Kota D

Alternatif Penyelesaian

- Perhatikan jalur dari kota A ke kota D melalui kota B
Dari kota A ke kota B terdapat 4 jalur yang dapat dilalui, sedangkan dari kota B terdapat 3 jalur yang dapat dilalui menuju kota D.
Jadi banyak cara memilih jalur dari kota A menuju kota D melalui kota B adalah $4 \times 3 = 12$ cara.
- Perhatikan jalur dari kota A ke kota D melalui kota C
Terdapat 3 jalur dari kota A menuju kota C dan 3 jalur dari kota C menuju kota D.
Jadi banyak cara memilih jalur dari kota A menuju kota D melalui kota B adalah $3 \times 3 = 9$ cara.

Jadi banyak jalur yang dapat dilalui melalui Kota A sampai ke Kota D adalah $12 + 9 = 21$ cara.

- ♦ Seandainya ada satu jalur yang menghubungkan kota B dan kota C, berapa banyak jalur yang dapat dipilih dari kota A menuju kota D?

Kegiatan 8.1

Catatlah baju, celana, dan sepatumu berdasarkan warna, kemudian isilah dalam bentuk tabel berikut ini:

Tabel 8.1 Tabel Daftar Warna Pakaian

Baju	Celana	Sepatu
Putih	Hitam	Coklat
Merah	Abu-abu	Hitam
Biru	Coklat	Putih
:	:	:

Salin dan lengkapi tabel di atas kemudian perhatikan data yang diperoleh dan cobalah menjawab pertanyaan berikut:

1. Jika diasumsikan setiap warna dapat dipasangkan, berapa banyak kemungkinan warna baju dan warna celana yang dapat dipasangkan?
2. Berapakah banyak kemungkinan pakaian lengkap yakni baju, celana, dan sepatu kamu yang dapat dipasangkan?

Alternatif Penyelesaian

1. Jika diasumsikan setiap warna pada baju, celana dan sepatu dapat dipasangkan maka dapat ditentukan kemungkinan pasangan yang dihasilkan; yakni:
 $\text{Banyak warna baju} \times \text{banyak warna celana} = \text{Banyak pasangan warna baju dan celana}.$
2. Banyak pemasangan baju, celana, dan sepatu untuk tabel di atas adalah:
 $\text{Banyak warna baju} \times \text{Banyak warna celana} \times \text{Banyak warna sepatu} = \text{Banyak kombinasi warna pakaian}.$

Dalam dunia kerja seorang pemimpin atau karyawan juga pernah dihadapkan dengan bagaimana memilih cara untuk menyusun unsur atau memilih staff. Masalah berikut ini, mengajak kita untuk memahami bagaimana cara kerja pada suatu supermarket.



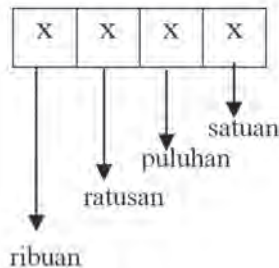
Masalah-8.2

Seorang manajer supermarket ingin menyusun barang berdasarkan nomor seri barang. Dia ingin menyusun nomor seri yang dimulai dari nomor 3000 sampai dengan 8000 dan tidak memuat angka yang sama. Tentukan banyak nomor seri yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Alternatif Penyelesaian

Mari kita uraikan permasalahan di atas.

- Setiap bilangan yang berada diantara 3000 dan 8000 pastilah memiliki banyak angka yang sama yakni 4 angka jika ditampilkan dalam bentuk kolom menjadi:



- Perhatikan untuk mengisi ribuan hanya dapat diisi angka 3, 4, 5, 6, 7. Artinya terdapat 5 cara mengisi ribuan.
- Untuk mengisi ratusan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 7 yang mungkin (mengapa?).
- Untuk mengisi puluhan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 6 angka yang mungkin (mengapa?).
- Untuk mengisi satuan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 5 angka yang mungkin (mengapa?).

Dengan demikian, banyak angka yang dapat mengisi keempat posisi tersebut adalah sebagai berikut:

5	7	6	5
---	---	---	---

Banyak susunan nomor seri barang yang diperoleh adalah: $5 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.050$ cara.

Berkaitan dengan Masalah 8.2,

- Hitunglah banyak cara menyusun nomor seri barang, jika angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 diperbolehkan berulang.
- Seandainya manager supermarket tersebut ingin menyusun nomor seri barang adalah bilangan-bilangan ganjil yang terdiri dari 5 angka. Berapa cara menyusun nomor seri tersebut.

Dari pembahasan masalah, contoh dan kegiatan di atas, dapat kita simpulkan dalam aturan perkalian berikut ini.

Aturan Perkalian :

Jika terdapat k unsur yang tersedia, dengan:

n_1 = banyak cara untuk menyusun unsur pertama

= banyak cara untuk menyusun unsur kedua setelah unsur pertama tersusun

n_3 = banyak cara untuk menyusun unsur ketiga setelah unsur kedua tersusun

:

n_k = banyak cara untuk menyusun unsur ke- k setelah objek- unsur sebelumnya tersusun

Maka banyak cara untuk menyusun k unsur yang tersedia adalah:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k.$$

- ♦ Dari pembahasan masalah, contoh dan kegiatan di atas, dapat kita simpulkan dalam aturan perkalian berikut ini.

Matematika merupakan bahasa simbol. Oleh karena itu, penulisan aturan perkalian di atas dapat disederhanakan dengan menggunakan faktorial.

Mari kita pelajari dengan teliti materi berikut.

b. Faktorial

Pada pembahasan di atas kamu telah melakukan perkalian $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Coba anda lakukan perkalian berikut:

- 1) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \dots$
- 2) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \dots$
- 3) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \dots$

Perkalian-perkalian semua bilangan bulat positif berurut di atas dalam matematika disebut faktorial, yang biasa disimbolkan dengan "!"

Maka perkalian tersebut dapat dituliskan ulang menjadi:

- 1) $3 \times 2 \times 1 = 3!$
- 2) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$
- 3) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$
- 4) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$

Secara umum faktorial dapat didefinisikan sebagai berikut:



Definisi 8.1

a) Jika n bilangan asli maka $n!$ (dibaca " n faktorial") didefinisikan dengan:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

atau

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

b) $0! = 1$



Contoh 8.3

1. Hitunglah:

a. $7! + 4!$

b. $7! \times 4!$

c. $\frac{7!}{4!}$

Alternatif Penyelesaian

a. $7! + 4! = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$$= 5.040 + 24 = 5.064$$

b. $7! \times 4! = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$$= 5.040 \times 24 = 120.960$$

c. $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

2. Nyatakan bentuk-bentuk berikut dalam bentuk faktorial.

a. 7×6 b. $(6!) \times 7 \times 8$ c. $n \times (n-1) \times (n-3)$

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{a. } 7 \times 6 &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{7!}{5!} \end{aligned}$$

Maka dapat dituliskan bahwa $7 \times 6 = \frac{7!}{5!}$.

b. $(6!) \times 7 \times 8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$

c. Kerjakan secara mandiri

3. Diketahui $\frac{14 \cdot (n-1)! \cdot (n-4)!}{5 \cdot n! \cdot (n-5)!} = \frac{4!}{120}$, tentukanlah nilai n , dengan n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} \frac{14 \cdot (n-1)! \cdot (n-4)!}{5 \cdot n! \cdot (n-5)!} &= \frac{4!}{120} \Leftrightarrow \frac{14 \cdot (n-1)! \cdot (n-4)!}{5 \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (n-5)! \cdot (n-4)!} = \frac{4!}{120} \\ &\Leftrightarrow \frac{14}{5 \cdot n \cdot (n-5)} = \frac{4!}{120} \\ &\Leftrightarrow \frac{14}{n \cdot (n-5)} = \frac{5!}{120} \\ &\Leftrightarrow n^2 - 5n - 14 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore n = 7.$$

c. Permutasi

1) Permutasi dengan Unsur yang Berbeda



Masalah-8.3

Seorang resepsionis klinik ingin mencetak nomor antrian pasien yang terdiri tiga angka dari angka 1, 2, 3, dan 4. Tentukan banyak pilihan nomor antrian dibuat dari:

- Tiga angka pertama.
- Empat angka yang tersedia.

Alternatif Penyelesaian

- a. Jika resepsionis menggunakan angka 1, 2, 3 maka nomor antrian yang dapat disusun adalah:

123 132 213 231 312 321

Terdapat 6 angka kupon antrian.

- b. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3, dan 4, maka susunan nomor antrian yang diperoleh adalah:

123 142 231 312 341 421
124 143 234 314 342 423
132 213 243 321 412 431
134 214 241 324 413 432

Sehingga terdapat 24 pilihan nomor antrian.

Mari kita cermati bagaimana menyelesaikan masalah di atas dengan menggunakan konsep faktorial.

1. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3 maka banyak susunan nomor antrian adalah:

$$6 = 3 \times 2 \times 1 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = \frac{3!}{1!} = \frac{3!}{(3-3)!}$$

2. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3, dan 4 maka banyak susunan nomor antrian adalah:

$$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = \frac{4!}{1!} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

Demikian selanjutnya jika diteruskan, banyak susunan k angka dari n angka yang disediakan yang dapat dibuat adalah:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \text{ dengan } n \geq k. \quad (*)$$

Untuk menguji kebenaran pola rumusan (*), coba kita gunakan untuk memecahkan masalah berikut ini.



Masalah-8.4

Sekolah SMA Generasi Emas, setiap tahun mengadakan acara pentas seni. Biasanya 8 bulan sebelum acara akbar, para siswa melakukan pemilihan untuk jabatan ketua dan sekretaris. Setelah melalui seleksi terdapat 5 kandidat yang mendaftarkan diri; yakni, Ayu (A), Beni (B), Charli (C), Dayu (D), dan Edo (E). Bagaimana kita mengetahui banyak cara memilih ketua dan sekretaris untuk acara pentas seni sekolah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk mengetahui banyak susunan pengurus dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain:

a) Dengan cara mendaftar:

Seluruh kandidat yang mungkin dibuat dapat didaftarkan sebagai berikut:

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Dari daftar di atas diperoleh banyak susunan pengurus acara pentas seni adalah 20 cara.

b) Dengan Aturan Perkalian

Untuk masalah ini, akan dipilih 2 pengurus dari 5 kandidat yang ada. Dengan menggunakan pola rumusan (*) diperoleh:

$$n = 5 \text{ dan } k = 2$$

$$\text{maka } \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20 \text{ cara}$$

Dengan pembahasan Masalah 8.3 dan 8.4 ditemukan bahwa banyak susunan k unsur berbeda dari n unsur yang tersedia dan memperhatikan urutan susunannya dapat dirumuskan dengan $\frac{n!}{(n-k)!}$. Bentuk susunan ini dikenal dengan "permutasi".



Definisi 8.2

Permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia biasa dituliskan P_k^n atau ${}_nP_k$ serta $P(n, k)$ dengan $k \leq n$.

- Banyak permutasi n unsur ditentukan dengan aturan

$$P_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

- Banyak permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia, dapat ditentukan dengan:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pada buku ini, penulisan permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia kita menggunakan: P_k^n .

Sekarang cermati permutasi-permutasi di bawah ini:

$$1) P_1^{10} = \frac{10!}{(10-1)!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$$

$$2) P_9^{10} = \frac{10!}{(10-9)!} = \frac{10!}{1!} = 10!$$

$$3) P_7^8 = \frac{8!}{(8-7)!} = \frac{8!}{1!} = 8!$$

$$4) P_{44}^{45} = \frac{45!}{(45-44)!} = \frac{45!}{1!} = 45!$$

$$5) P_1^{1000} = \frac{1000!}{(1000-1)!} = \frac{1000 \times 999!}{999!} = 1000$$

$$6) P_{2013}^{2014} = \frac{2014!}{(2014-2013)!} = \frac{2014!}{1!} = 2014!$$

$$7) P_{1000}^{1000} = \frac{1000!}{(1000-1000)!} = \frac{1000!}{0!} = 1000!$$

Diperlukan strategi untuk menyelesaikan perkalian dengan faktorial.

Dari pembahasan permutasi-permutasi di atas, dapat kita simpulkan sifat berikut ini.



Sifat 8.1

Diketahui $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$.

- 1) Jika $n - k = 1$, maka $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!$.
- 2) Jika $k = 1$, maka $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n$.
- 3) Jika $n - k = 0$, maka $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!$.

Bukti:

- 1) Diketahui $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$, dan $n - k = 1$ atau $n = k + 1$. Akibatnya:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \Leftrightarrow P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1-k)!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

$$\therefore P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!.$$

- 2) Diketahui $k = 1$ dan $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$, maka:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \Leftrightarrow P_1^n = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

- 3) Kerjakan sebagai latihanmu.

2) Permutasi dengan Unsur-Unsur yang Sama



Masalah-8.5

Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari 3 huruf yang diambil dari huruf-huruf pembentuk kata APA?

Alternatif Penyelesaian

Tersedia 3 unsur; yakni, huruf-huruf A, P, dan A. Dari 3 unsur yang tersedia memuat 2 unsur yang sama; yaitu, huruf A.

Banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama tersebut akan dicari melalui pendekatan banyak permutasi 3 unsur yang berbeda. Oleh karena itu, huruf-huruf yang sama (huruf A) diberi label A_1 , dan A_2 .

Banyak permutasi dari 3 unsur yang melibatkan 2 unsur yang sama adalah:

A_1PA_2 , A_2PA_1 , A_1A_2P , A_2A_1P , PA_1A_2 , PA_2A_1 .

Susunan-susunan tersebut dikelompokkan sedemikian rupa sehingga dalam satu kelompok memuat permutasi yang sama apabila labelnya dihapuskan.

Misalnya:

- Kelompok A_1PA_2 dan A_2PA_1 , jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi APA.
- Kelompok A_1A_2P , A_2A_1P , jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi AAP.
- Kelompok PA_1A_2 , PA_2A_1 , jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi PAA.

Dalam tiap-tiap kelompok di atas terdapat $2! = 2$ permutasi, yaitu menyatakan banyak permutasi dari unsur A_1 dan A_2 . Sedangkan A_1 dan A_2 menjadi unsur-unsur yang sama jika labelnya dihapuskan.

Dengan demikian banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama dapat ditentukan sebagai berikut.

$$P_{2,1}^3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3 \text{ susunan}$$



Masalah-8.6

Pada sebuah upacara pembukaan turnamen olah raga disusun beberapa bendera klub yang ikut bertanding. Terdapat 3 bendera berwarna putih, 2 bendera berwarna biru, dan 1 bendera berwarna merah. Tentukanlah susunan bendera yang ditampilkan pada acara upacara pembukaan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Dengan analogi yang sama pada Masalah 8.5 diperoleh:

Banyak unsur yang tersedia 6, sedangkan unsur yang sama adalah

1. 3 bendera berwarna putih
2. 2 bendera berwarna biru

dan 1 warna merah. Oleh karena itu dapat diperoleh banyak permutasi dari 6 unsur yang memuat 3 unsur yang sama dan 2 unsur yang sama adalah

$$P_{3,2,1}^6 = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \text{ susunan}$$

Dari pembahasan Masalah 8.5 dan 8.6, dapat kita rumuskan pola secara umum permutasi n unsur dengan melibatkan sebanyak $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ unsur yang sama adalah sebagai berikut.



Sifat 8.2

Misalkan dari n unsur terdapat $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ unsur yang sama dengan $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = n$. Banyak permutasi dari n unsur tersebut adalah

$$P_{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n}^n = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_n!}$$



Contoh 8.4

Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari 3 huruf yang diambil dari huruf pembentuk kata KOGNITIVISTIK?

Alternatif Penyelesaian

Tersedia 13 unsur dalam kata tersebut; yaitu huruf-huruf K, O, G, N, I, T, I, V, I, S, T, I, K. Dari 13 unsur yang tersedia memuat 4 huruf I yang sama, 2 huruf K yang sama dan 2 huruf T yang sama.

Jika kita partisi banyak huruf pembentuk kata K O G N I T I V I S T I K adalah sebagai berikut:

$$k_K + k_O + k_G + k_N + k_I + k_T + k_V + k_S = 2 + 1 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 = 13.$$

Jadi permutasi yang melibatkan unsur yang sama, dihitung dengan menggunakan Sifat 8.2, diperoleh:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_k!} = \frac{13!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 129.729.600 \text{ cara.}$$

Sampai sejauh ini, kita sudah mengkaji bagaimana menentukan susunan unsur baik yang melibatkan unsur yang sama atau tidak. Pernahkan kamu melihat susunan objek-unsur dalam suatu meja berputar? Bagaimana menentukan banyak cara menyusun unsur jika disusun melingkar?

Berikut ini, kita akan pelajari permutasi siklis sebagai cara menentukan banyak cara menyusun unsur yang tersusun melingkar.

c. Permutasi Siklis

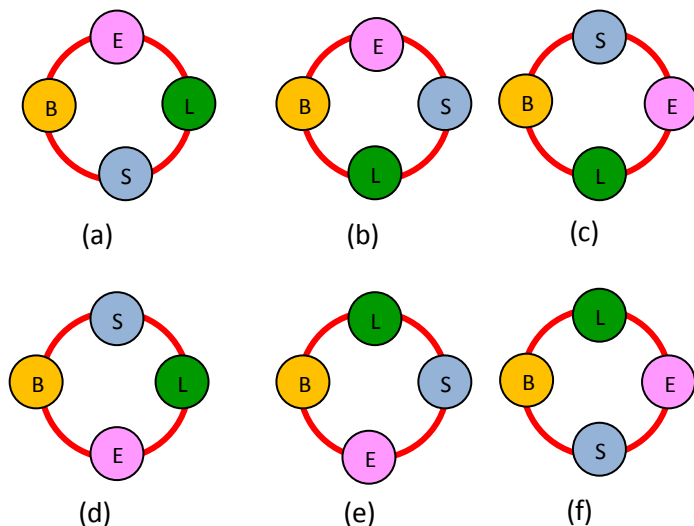


Masalah-8.7

Beny (B), Edo (E), dan Lina (L) berencana makan bersama di sebuah restoran. Setelah memesan tempat, pramusaji menyiapkan sebuah meja bundar buat mereka. Selang beberapa waktu Siti datang bergabung dengan mereka. Berapa banyak cara keempat orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Meskipun dalam keseharian kita tidak mempersoalkan urutan posisi duduk mengitari suatu meja, tidak ada salahnya kita menyelidiki posisi duduk Beny, Edo, Lina, dan Siti yang duduk mengitari meja bundar. Adapun posisi duduk yang mungkin keempat orang tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 8.3 Susunan posisi tempat duduk

Terdapat 6 cara posisi duduk keempat mengitari meja bundar tersebut.

- Ternyata, pola $(n - 1)!$ Akan menghasilkan banyak cara dengan banyak cara yang diperoleh dengan cara manual, yaitu $(4 - 1)! = 3! = 6$ cara.

Coba temukan susunan posisi duduk Beny, Edo, dan Lina secara manual. Kemudian bandingkan dengan menggunakan pola $(n - 1)!$.



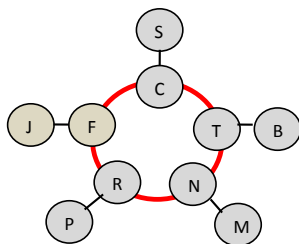
Masalah-8.8

Seorang direktor bank swasta yang berkantor di Jakarta akan melakukan rotasi kepala cabang yang terdapat di 5 kota besar, yaitu Fahmi (Jakarta), Cintha (Surabaya), Trisnawati (Bandung), Novand (Medan), dan Rahmat (Padang). Dia meminta staff ahlinya untuk menyusun pilihan-pilihan yang mungkin untuk rotasi kepala cabang bank yang dipimpinnya.

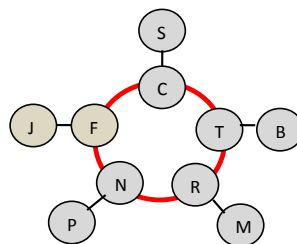
Bantulah staff ahli tersebut untuk menyusun pilihan rotasi kepala cabang bank swasta tersebut

Alternatif Penyelesaian

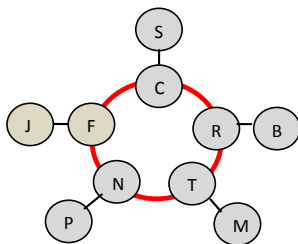
Misalkan kelima kepala cabang tersebut duduk melingkar, seperti diilustrasikan pada gambar berikut ini.



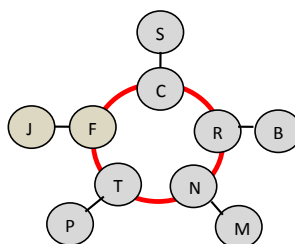
Posisi kepala cabang sebelum rotasi



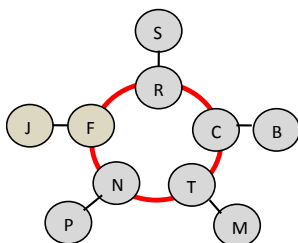
Pilihan rotasi 1



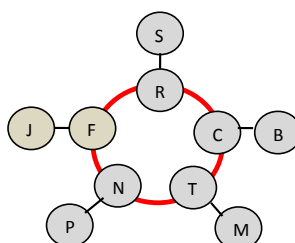
Pilihan rotasi 2



Pilihan rotasi 3



Pilihan rotasi 4



Pilihan rotasi 5

Gambar 8.4 Ilustrasi rotasi kepala cabang bank swasta

- ♦ Menurut kamu, ada berapakah pilihan rotasi kepala cabang bank swasta tersebut? Berikan penjelasanmu.

Untuk menentukan banyak cara menyusun unsur dalam posisi melingkar, kita dapat menguji validitas pola $(n - 1)!$.

- Jika terdapat 4 unsur, maka banyak susunan adalah $(4 - 1)! = 3! = 6$ cara.
- Jika terdapat 3 unsur, maka banyak susunan adalah $(3 - 1)! = 2! = 2$ cara.
- Jika terdapat 5 unsur, maka banyak susunan adalah $(5 - 1)! = 4! = 24$ cara.

Secara umum, jika terdapat n unsur yang disusun melingkar, maka banyak susunan unsur yang mungkin disebut permutasi siklis, dinyatakan dalam sifat berikut ini.



Sifat 8.3

Misalkan dari n unsur yang berbeda yang tersusun melingkar. Banyak permutasi siklis dari n unsur tersebut dinyatakan:

$$P_{\text{siklis}} = (n-1)!$$

- ♦ Perhatikan kembali Masalah 8.8, karena alasan keluarga Fahmi dan Trisnawati hanya mau dirotasi jika mereka berdua ditempatkan di pulau yang sama. Berapa pilihan rotasi kepala cabang bank swasta yang mungkin? Kerjakan secara mandiri dan bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

1.4 Kombinasi

Cara menyusun unsur dengan memperhatikan urutan telah dikaji pada sub pokok bahasan permutasi. Selanjutnya, dalam percakapan sehari-hari kita mungkin pernah mengatakan “kombinasi warna pakaian kamu sangat tepat” atau tim sepakbola itu merupakan kombinasi pemain-pemain handal”. Apakah kamu memahami arti kombinasi dalam kalimat itu?

Untuk menjawabnya, mari kita pelajari makna kombinasi melalui memecahkan masalah-masalah berikut ini.



Masalah-8.9

Hasil seleksi PASKIBRA di Kabupaten Bantul tahun 2012, panitia harus memilih 3 PASKIBRA sebagai pengibar bendera dari 5 PASKIBRA yang terlatih, yaitu Abdul (A), Beny (B), Cyndi (C), Dayu (D), dan Edo (E). 3 PASKIBRA yang dipilih dianggap memiliki kemampuan sama, sehingga tidak perhatikan lagi PASKIBRA yang membawa bendera atau penggerek bendera. Berapa banyak pilihan PASKIBRA yang dimiliki panitia sebagai pengibar bendera?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita selesaikan masalah ini dengan cara manual, sambil memikirkan bagaimana pola rumusan untuk menyelesaikannya.

Adapun pilihan-pilihan yang mungkin sebagai pengibar bendera adalah sebagai berikut:

- Pilihan 1: Abdul, Badu, Cyndi
- Pilihan 2: Abdul, Badu, Dayu

- Pilihan 3: Abdul, Badu, Edo
- Pilihan 4: Abdul, Cyndi, Dayu
- Pilihan 5: Abdul, Cyndi, Edo
- Pilihan 6: Abdul, Dayu, Edo
- Pilihan 7: Badu, Cyndi, Dayu
- Pilihan 8: Badu, Cyndi, Edo
- Pilihan 9: Badu, Dayu, Edo
- Pilihan 10: Cyndi, Dayu, Edo

Terdapat 10 pilihan PASKIBRA sebagai pengibar bendera.

Dengan menggunakan faktorial, 10 cara yang ditemukan dapat dijabar sebagai berikut:

$$10 = \frac{5}{3} \times 3! \text{ atau } 10 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \quad (\#)$$

- ♦ Seandainya terdapat 4 PASKIBRA, berapa banyak cara memilih 3 PASKIBRA sebagai pengibar bendera? Coba kerja dengan cara manual, kemudian coba uji dengan menggunakan pola (#).

Perlu kita cermati, bahwa susunan kali ini perlu digarisbawahi bahwa pilihan (Abdul, Badu, Cyndi) sama dengan pilihan (Abdul, Cyndi, Badu) atau (Badu, Abdul, Cyndi) atau (Badu, Cyndi, Abdul) atau (Cyndi, Abdul, Badu) atau (Cyndi, Badu, Abdul).

- ♦ Jika pembawa bendera harus PASKIBRA perempuan, berapa banyak pilihan pengibar bendera yang mungkin? Coba kerjakan secara mandiri.



Masalah-8.10

Pada suatu pusat pelatihan atlet bulu tangkis, terdapat 3 atlet perempuan dan 4 atlet laki-laki yang sudah memiliki kemampuan yang sama. Untuk suatu pertandingan akbar, tim pelatih ingin membentuk 1 pasangan ganda campuran.

Berapa banyak pasangan yang dapat dipilih oleh tim pelatih?

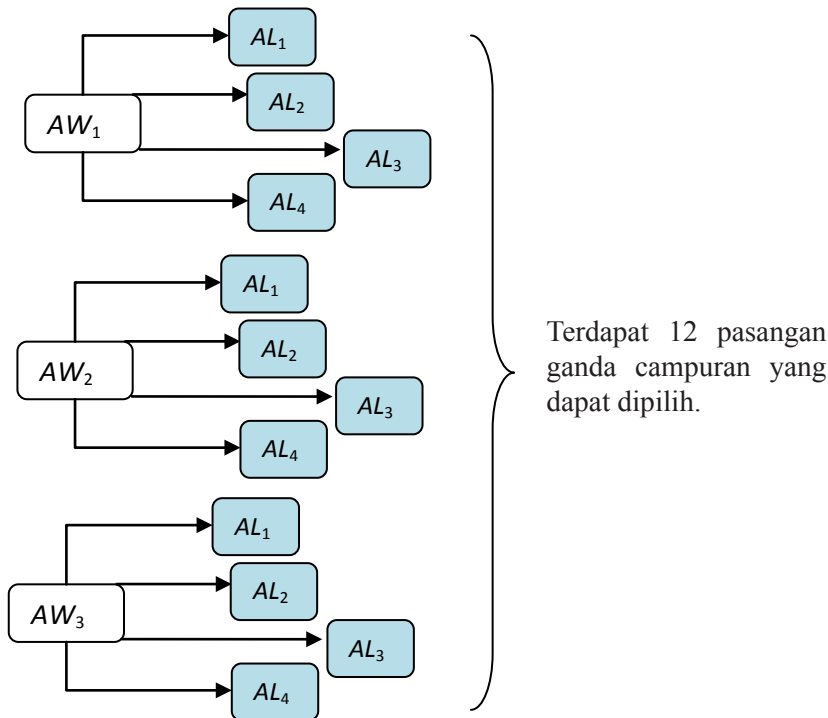
Alternatif Penyelesaian

Mari kita selesaikan masalah ini dengan menggunakan cara manual. Untuk memilih 1 pasangan ganda campuran berarti memilih 1 atlet wanita dari 3 atlet wanita dan memilih 1 atlet laki-laki dari 4 atlet laki-laki.

Misalkan tiga atlet wanita kita beri inisial: AW_1 , AW_2 , AW_3 ; dan

4 atlet laki-laki kita beri inisial: AL_1 , AL_2 , AL_3 , AL_4 .

Dengan menggunakan metode diagram, banyak pilihan 1 pasangan ganda campuran dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 85 Diagram pohon pilihan pasangan ganda campuran

Dengan menggunakan faktorial, mari kita mencoba menentukan jabarkan 12 cara dengan menerapkan pola (#).

$$12 = 3 \times 4 = \left(\frac{3}{1} \times 1! \right) \times \left(\frac{4}{1} \times 1! \right) = \left(\frac{3!}{1! \cdot 2!} \right) \times \left(\frac{4!}{1! \cdot 3!} \right)$$

Dari pembahasan Masalah 8.9 dan 8.10, memilih k unsur dari n unsur tanpa memperhatikan urutan unsur yang dipilih disebut kombinasi. Kombinasi k unsur dari n unsur yang didefinisikan sebagai berikut.



Definisi 8.3

Kombinasi k unsur dari n unsur biasa dituliskan C_k^n ; ${}_nC_k$; $C(n, k)$ atau $\binom{n}{k}$

Banyak kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia, tanpa memperhatikan urutan susunannya dapat ditentukan dengan:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \text{ dengan } n \geq k, n, k \text{ merupakan bilangan asli.}$$

Untuk keseragaman notasi, pada buku ini kita sepakat menggunakan simbol C_k^n untuk menyatakan kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia.



Contoh 8.5

Selidiki hubungan P_k^n dengan C_k^n .

Alternatif Penyelesaian

Pada Definisi 8.2 $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$. Sedangkan berdasarkan Definisi 8.3 $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Dari kedua definisi tersebut, diperoleh hubungan:

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}.$$

- ♦ Secara hitungan matematis, hubungan P_k^n dengan C_k^n adalah $C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}$. Jelaskan arti hubungan tersebut secara deskriptif.

Dari pembahasan komputasi dan Contoh 8.5 di atas, dapat kita simpulkan sifat berikut ini.



Sifat 8.4

Diketahui $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, dengan $n \geq k$.

1) Jika $n - k = 1$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = n$.

2) Jika $k = 1$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = n$.

3) Jika $n = k$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = 1$.

4) Jika $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, maka $C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}$.

Bukti:

1) Diketahui $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, dengan $n \geq k$, dan $n - k = 1$ atau $n = k + 1$, maka:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(k+1)!}{(k+1-k)!k!} = \frac{(k+1) \times k!}{(1)!k!} = k+1 = n.$$

2) Karena $k = 1$, dan $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, dengan $n \geq k$, maka:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} \Leftrightarrow C_1^n = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)! \cdot (1)!} = n.$$

3) Kerjakan sebagai latihanmu.

1.5 Binomial Newton

Kamu telah mempelajari tentang kombinasi sebagai bagian dari aturan pencacahan. Dengan menggunakan konsep kombinasi dapat juga kita kembangkan pada bahasan binomial. Perhatikan perpangkatan berikut ini.

Sekarang amati pola segitiga Pascal. Dengan menggunakan konsep kombinasi C_r^n dapat dikaitkan dengan pola segitiga Pascal di atas yakni:

$$C_0^0 = C_0^1 = C_1^1 = C_0^2 = C_2^2 = C_0^3 = C_3^3 = C_0^4 = C_4^4 = C_0^5 = C_5^5 = 1$$

$$C_1^2 = 2$$

$$C_1^3 = C_2^3 = 3$$

dan seterusnya

sehingga dengan menggunakan konsep kombinasi maka dapat diperoleh pola segitiga Pascal yang baru, yakni:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a+b)^0 \rightarrow n=0 & & & & & & C_0^0 \\
 (a+b)^1 \rightarrow n=1 & & & & & C_0^1 & C_1^1 \\
 (a+b)^2 \rightarrow n=2 & & & & C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 \\
 (a+b)^3 \rightarrow n=3 & & & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \\
 (a+b)^4 \rightarrow n=4 & & C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 \\
 (a+b)^5 \rightarrow n=5 & C_0^5 & C_1^5 & C_2^5 & C_3^5 & C_4^5 & C_5^5
 \end{array}$$

Dari uraian di atas maka penjabaran perpangkatan dapat kita tuliskan kembali dalam bentuk kombinasi yaitu

$$(a+b)^0 = C_0^0$$

$$(a+b)^1 = C_0^1 a + C_1^1 b$$

$$(a+b)^2 = C_0^2 a^2 + C_1^2 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_0^3 a^3 + C_1^3 a^2 b + C_2^3 ab^2 + C_3^3 b^3$$

$$(a+b)^4 = C_0^4 a^4 + C_1^4 a^3 b + C_2^4 a^2 b^2 + C_3^4 ab^3 + C_4^4 b^4$$

$$(a+b)^5 = C_0^5 a^5 + C_1^5 a^4 b + C_2^5 a^3 b^2 + C_3^5 a^2 b^3 + C_4^5 ab^4 + C_5^5 b^5$$

Dengan pola di atas, dikenal sebagai *aturan Binomial Newton* (ekspansi binomial) dan bentuk umum $(a + b)^n$ dituliskan sebagai berikut:

Aturan Binomial Newton

$$(a + b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b^1 + \dots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

atau

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n C_r^n a^{n-r} b^r$$

n, r merupakan bilangan asli.



Contoh 8.6

Jabarkan bentuk binomial berikut ini:

1. $(2a - 5)^3 =$
2. $(a + b)^5 =$
3. $(3a + 2b)^4 =$
4. $\left(a + \frac{2}{a}\right)^5 =$
5. Diketahui binomial $\left(2a + \frac{1}{a}\right)^{14}$. Jabarkanlah 3 suku pertama dan dua suku terakhir.
6. Tentukanlah koefisien dari a^2 pada bentuk binomial $\left(a^2 + \frac{2}{a}\right)^{12}$.

Alternatif Penyelesaian

1. Dari soal di atas diketahui $a = 2a$ dan $b = 5$ maka

$$\begin{aligned} (2a - 5)^3 &= C_0^3 (2a)^3 5^0 + C_1^3 (2a)^2 5^1 + C_2^3 (2a)^1 5^2 + C_3^3 (2a)^0 5^3 \\ &= 2(8a^3)1 + 3(4a^2)5 + 3(2a)25 + 1(1)125 \end{aligned}$$

$$(2a - 5)^3 = 16a^3 + 60a^2 + 150a + 125$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad (a+b)^6 &= C_0^6 a^6 b^0 + C_1^6 a^{6-1} b^1 + C_2^6 a^{6-2} b^2 + C_3^6 a^{6-3} b^3 + C_4^6 a^{6-4} b^4 + \\
 &\quad C_5^6 a^{6-5} b^5 + C_6^6 a^{6-6} b^6 \\
 &= 1a^6 1 + 6a^5 b^1 + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6a^1 b^5 + 1a^0 b^6 \\
 &= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6
 \end{aligned}$$

3. Cermati ekspansi di bawah ini.

$$\begin{aligned}
 (3a+2b)^4 &= C_0^4 (3a)^4 b^0 + C_1^4 (3a)^{4-1} b^1 + C_2^4 (3a)^{4-2} b^2 + C_3^4 (3a)^{4-3} b^3 + \\
 &\quad C_4^4 (3a)^{4-4} b^4 \\
 &= 1(81a^4)1 + 4(3a)^3 b^1 + 6(3a)^2 b^2 + 4(3a)^1 b^3 + 1(3a)^0 b^4 \\
 &= 81a^4 + 4(81a^3)b + 6(9a^2)b^2 + 4(3a)b^3 + 1b^4 \\
 &= 81a^4 + 324a^3b + 54a^2b^2 + 12ab^3 + b^4
 \end{aligned}$$

- ♦ Sebagai latihan untuk mengasah kemampuan dalam menyelesaikan soal-soal binomial newton, kerjakan secara mandiri soal nomor 4, 5, dan 6.



Uji Kompetensi 8.1

- Seorang staff ahli di suatu POLDA mendapat tugas untuk menyusun nomor pada plat kendaraan roda empat yang terdiri 3 angka dan 4 angka. Staff tersebut hanya diperbolehkan menggunakan angka 1, 2, 3, 4, 5, 6 untuk plat yang terdiri dari 3 angka dan angka 0 sampai 9 untuk plat yang terdiri 4 angka.
 - Berapa cara menyusun plat kendaraan yang terdiri dari 3 angka dan 4 angka?
 - Jika nomor-nomor plat tersebut akan dilengkapi dengan seri yang terdiri dari dua huruf vokal. Berapa banyak susunan seri plat yang mungkin?
- Diberikan angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Rangkailah bilangan yang terdiri dari 5 angka yang berbeda dengan syarat:
 - Bilangan ganjil
 - Bilangan genap
- Dari kota A ke kota B dilayani oleh 4 bus dan dari B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke kota C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka hitunglah banyak cara perjalanan orang tersebut.

4. Tentukan nilai dari:

$$\frac{89! \times 38!}{86! \times 41!}$$

5. Sederhanakanlah persamaan berikut:

a. $\frac{n!}{(n-1)!}$

b. $\frac{(n+2)!}{n!}$

c. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

6. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris?
7. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris?
8. Tentukan banyak susunan pemain yang berbeda dari team bola voli yang terdiri dari 10 pemain bila salah seorang selalu menjadi kapten dan seorang lain tidak bisa bermain karena cedera!
9. Berapa banyak cara untuk menempatkan 3 anak laki-laki dan 2 anak perempuan duduk berjajar tanpa membedakan tiap anak?
10. Suatu delegasi terdiri dari 3 pria dan 3 wanita yang dipilih dari himpunan 5 pria yang berbeda usia dan 5 wanita yang juga berbeda usia. Delegasi itu boleh mencakup paling banyak hanya satu anggota termuda dari kalangan wanita atau anggota termuda dari kalangan pria. Hitunglah banyak cara memilih delegasi tersebut.
11. Seminar Matematika dihadiri oleh 20 orang. Pada saat bertemu mereka saling berjabat tangan satu dengan yang lain. Berapakah jabat tangan yang terjadi?
12. Perhatikan gambar berikut.



Jika suatu segitiga dibentuk dengan menggunakan 3 titik. Berapa banyak segitiga yang dapat dibentuk.

13. Tentukanlah banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf:
- | | |
|---------------|-----------------|
| a. MATEMATIKA | c. TRIGONOMETRI |
| b. PENDIDIKAN | d. MALAKA |

11. Jabarkanlah bentuk binomial berikut ini:

a. $(2a + 3b)^8$

c. $\left(2a + \frac{b}{2}\right)^6$

b. $(4a + 2b)^{10}$

d. $\left(\frac{2a}{3} + \frac{1}{3b}\right)^8$



Projek

Rancang suatu permainan yang menggunakan konsep aturan pencacahan. Sebelum kamu susun laporan projek ini, terlebih dahulu lakukan simulasi sebagai uji validitas penggunaan konsep.

2. PELUANG

Kamu sudah mempelajari konsep peluang pada Bab 12 Buku Matematika kelas X. Dengan pengalaman belajar itu, kita akan mengembangkan konsep peluang dengan memperhatikan banyak cara semua kejadian mungkin terjadi dan banyak cara suatu kejadian mungkin terjadi. Dengan demikian, pada sub bab ini, kita akan mendalami bagaimana menentukan banyak anggota ruang sampel kejadian dengan menggunakan konsep aturan pencacahan.

Mari kita mulai sub bab ini dengan mengkaji ruang sampel suatu kejadian.

2.1 Konsep Ruang Sampel

Masih ingatkah kamu konsep himpunan yang kamu pelajari di kelas VII SMP? Pada sub bab ini, kita ingin membangun konsep ruang sampel dengan menggunakan konsep aturan pencacahan melalui konsep himpunan bagian.

Mari kita cermati pembahasan di bawah ini.

Diberikan $S = \{p, r, s, t\}$ $n(S) = 4$.

Tentu kamu masih ingat bagaimana cara menentukan himpunan bagian dari S . Semua himpunan bagian S disajikan di tabel berikut ini.

Tabel 8.2: Himpunan bagian S dengan tidak memperhatikan urutan

Himpunan Bagian Beranggota						
Kejadian	0	1	2	3	4	
	\emptyset	$\{p\},$ $\{r\},$ $\{s\},$ $\{t\}$	$\{p,r\},$ $\{p,s\},$ $\{p,t\},$ $\{r,s\},$ $\{r,t\},$ $\{s,t\}$	$\{p,r,s\},$ $\{p,r,t\},$ $\{p,s,t\},$ $\{r,s,t\}$	$\{p, r, s, t\}$	
Total	1	4	6	4	1	16
	C_0^4	C_1^4	C_2^4	C_3^4	C_4^4	2^n

Perhatikan angka-angka; 1, 4, 6, 4, 1 merupakan koefisien binomial untuk ekspansi $(a + b)^4$, yang dapat ditentukan berturut-turut melalui C_0^4 , C_1^4 , C_2^4 , C_3^4 , dan C_4^4 .

Dari tabel di atas, dapat diartikan bahwa banyak kejadian munculnya 2 anggota himpunan bagian dari S adalah $C_2^4 = 6$. Banyak semua himpunan bagian dari himpunan $S = 2^4 = 16$. Himpunan kuasa S adalah koleksi semua himpunan bagian S (Ingat kembali konsep himpunan kuasa seperti yang telah kamu pelajari pada kelas VII SMP). Jadi 16 adalah banyak anggota ruang sampel kejadian semua himpunan bagian S .

Selanjutnya Tabel 8.2 akan berubah jika kita memperhatikan urutan anggota. Kondisi ini disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel 8.3: Himpunan bagian S dengan memperhatikan urutan

Himpunan Bagian Beranggota						
Kejadian	0	1	2	3	4	
	\emptyset	$\{p\},$ $\{r\},$ $\{s\},$ $\{t\}$	$\{p,r\},\{r,p\}$ $\{p,s\},\{s,p\}$ $\{p,t\},\{t,p\}$ $\{r,s\},\{s,r\}$ $\{r,t\},\{t,r\}$ $\{s,t\},\{t,s\}$	$\{p,r,s\},$ $\{p,s,r\},$... $\{p,r,t\},$ $\{p,t,r\},$... $\{p,s,t\},$ $\{p,t,s\},$...	$\{p, r, s, t\},$ $\{p, r, t, s\},$ $\{p, s, r, t\},$...	
					$\{r, s, t\},$ $\{r, t, s\},$...	
Total	1	4	6	24	24	65
	P_0^4	P_1^4	P_2^4	P_3^4	P_4^4	

Pada kasus memperhatikan urutan anggota, konsep kombinasi yang digunakan pada Tabel 8.2 berubah menjadi konsep permutasi. Analog dengan kombinasi, banyak anggota kejadian munculnya himpunan bagian S beranggota dua (dengan memperhatikan urutan) adalah $P_2^4 = 12$. Sedangkan 65 merupakan banyak anggota ruang sampel kejadian semua himpunan bagian dengan memperhatikan urutan anggotanya.

Tentunya sudah punya gambaran tentang penerapan konsep permutasi atau kombinasi dalam menentukan banyak kejadian muncul pada suatu percobaan.

Berikut ini seorang ibu memiliki kesempatan memilih, mari kita selidiki apakah masalah tersebut menggunakan konsep permutasi atau kombinasi.



Masalah-8.11

Pada suatu tempat penitipan anak berusia 3 – 6 tahun menyediakan makanan dan minimum bergizi yang bervariasi. Bu Sity, karena alasan jam kerja memilih menitipkan anaknya di tempat penitipan ini. Dari semua variasi makanan dan minimum, Bu Sity harus memilih 2 jenis buah dari 4 jenis buah yang disediakan dan memilih 4 makanan dari 6 jenis makanan yang disediakan. Berapa banyak pilihan yang dimiliki oleh Bu Sity? Diasumsikan setiap anak makan juga harus makan buah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Tersedia 4 jenis buah dan akan dipilih 2 jenis buah.

Tersedia 6 jenis makanan dan akan dipilih 4 jenis makanan.

Setiap si anak makan harus makan buah.

Ditanya:

Banyak pilihan jenis susu dan jenis makanan.

Untuk kasus ini, misalnya Bu Sity memilih jenis buah 1 (b_1) dan jenis buah 2 (b_2) sama saja dengan memilih b_2 dan b_1 . Demikian juga makanan, jika Bu Sity makanan 1 (m_1) dan makanan 3 (m_3) sama saja dengan memilih m_3 dan m_1 (mengapa?).

Dengan demikian kita menggunakan konsep kombinasi untuk menentukan banyak pilihan yang dimiliki oleh Bu Sity.

Karena setiap makan anak Bu Sity juga harus makan buah, maka banyak kombinasi pilihan makanan dan minuman dinyatakan sebagai berikut:

$$C_2^4 \times C_4^6 = 6 \times 15 = 90 \text{ pilihan.}$$

- ♦ Menurut kamu, apa alasannya mengapa kita menggunakan operasi perkalian? Mengapa bukan operasi penjumlahan? Berikan alasanmu serta berikan contoh yang menggunakan operasi penjumlahan.



Contoh 8.7

Bu Jein Mumu, seorang guru matematika di Ambon. Suatu ketika dia ingin memberikan tugas kepada siswa yang sangat rajin dan memiliki daya tangkap di atas rata-rata teman satu kelasnya. Dia mempersiapkan 15 soal matematika berbentuk esai. Namun dari 15 soal itu, Bu Mumu hanya meminta si anak mengerjakan 10 soal, tetapi harus mengerjakan soal nomor 7, 12, dan 15.

Berapa banyak pilihan yang dimiliki anak itu?

Alternatif Penyelesaian

Siswa Bu Mumu harus memilih 7 soal lagi dari 12 soal sisa (mengapa) dan untuk mengetahui banyak cara memilih soal tersebut ditentukan dengan menggunakan kombinasi (beri alasannya), yaitu:

$$C_7^{12} = \frac{12!}{(12-7)! \cdot 7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 7!} = 729 \text{ cara.}$$

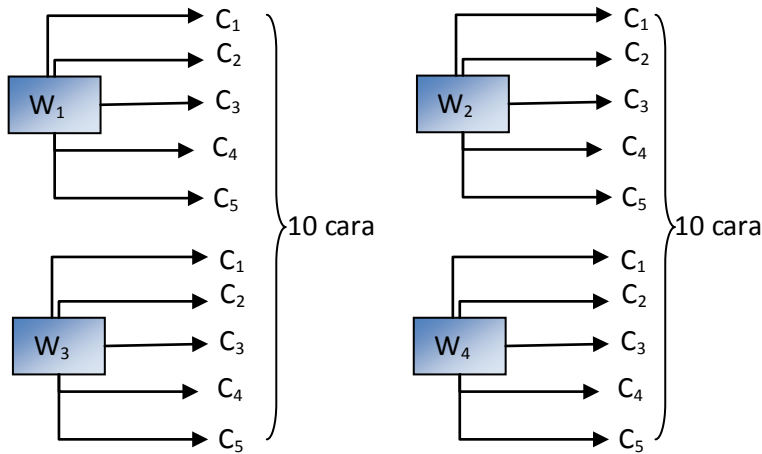


Contoh 8.8

Toko perhiasan yang berlokasi pusat perbelanjaan menerima 5 jenis cincin keluaran terbaru, misalkan C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , dan C_5 . Tidak lama setelah toko itu buka, 4 wanita berminat mencoba kelima cincin itu. Berapakah banyak cara pemasangan cincin tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk menyelesaikan ini, kita menggunakan aturan kaidah pencahahan. Semua kemungkinan pemasangan cincin dengan keempat wanita tersebut, diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 8.6 Diagram pemasangan cincin

Dengan menggunakan permutasi pemasangan cincin ditentukan sebagai berikut:

$$P_1^5 \times P_1^4 = \frac{5!}{(5-4)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} = 5 \times 4 = 20 \text{ cara.}$$

- ♦ Jelaskan mengapa perhitungan permutasi di atas menggunakan operasi perkalian!

Seandainya setiap dua wanita pertama ingin membeli masing-masing 1 cincin. Banyak pilihan cincin untuk kedua wanita itu dihitung dengan permutasi, yaitu:

$$P_1^5 \times P_1^4 = 5 \times 4 = 20 \text{ cara (selidiki dengan menggambarkan skema pencacahan).}$$

Dari pembahasan kajian, masalah-masalah, dan contoh-contoh di atas perlu kita tarik kesimpulan penggunaan permutasi atau kombinasi dalam menentukan banyak susunan/cara dalam memilih k unsur dari n unsur yang tersedia. Kesimpulan itu dinyatakan dalam prinsip berikut ini.



Prinsip-8.1

Misalkan dipilih k unsur dari n unsur (secara acak) yang tersedia, dengan $n \geq k$,

- Jika ada urutan dalam pemilihan k unsur, maka menentukan banyak cara pemilihan ditentukan dengan P_k^n .
- Jika tidak urutan dalam pemilihan k unsur, maka menentukan banyak cara pemilihan ditentukan dengan C_k^n .



Contoh 8.9

Dalam sebuah kantong berisi 8 manik putih dan 5 manik merah. Dari kantong itu diambil 6 buah manik. Berapa banyak pilihan untuk mengambil manik-manik itu, jika 6 buah manik itu terdiri atas:

- a) 5 manik putih dan 1 manik merah?
- b) 4 manik merah dan 2 manik putih?

Alternatif Penyelesaian

Objek yang akan diambil dari kantong adalah objek yang tidak memperhatikan urutan. Dengan demikian, menentukan banyak pilihan menggunakan konsep kombinasi, yaitu:

$$\text{a) } C_5^8 \times C_1^5 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \times \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 280 \text{ cara.}$$

$$\text{b) } C_4^8 \times C_2^5 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \times \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 700 \text{ cara.}$$

2.2 Peluang Kejadian Majemuk

Masih ingatkah kamu konsep peluang yang telah kamu pelajari pada kelas X SMA? Definisi 12.3 pada buku matematika kelas X menyatakan:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Pada kelas X, kamu sudah mempelajari bagaimana menentukan $n(E)$ dan $n(S)$ untuk kejadian tunggal. Pada Sub bab 2.1 di atas, kita sudah mengkaji bagaimana menentukan $n(E)$ dan $n(S)$ untuk suatu kejadian majemuk. Sekarang kita akan mempelajari menentukan peluang suatu kejadian dengan kejadian yang dimaksud adalah kejadian majemuk.

Mari kita mulai sub bab ini, dengan memecahkan masalah berikut ini.



Masalah-8.12

Dalam sebuah kolam kecil terdapat sebanyak 10 ikan lele dan sebanyak 5 ikan gurame. Dengan menggunakan jaring tangan, akan diambil 12 ikan secara acak. Hitunglah nilai peluangnya jika yang terambil itu adalah:

- a) 10 ikan lele dan 2 ikan gurame,
- b) 9 ikan lele dan 3 ikan gurame,
- c) 7 ikan lele dan 5 ikan gurame.

Alternatif Penyelesaian

Jelas untuk kasus ini, banyak cara memilih 12 ikan dari 15 ikan yang ada dihitung dengan menggunakan kombinasi, yaitu: $C_{12}^{15} = \frac{15!}{3!.12!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{(3 \times 2 \times 1).12!} = 455$ cara.

Artinya banyak anggota ruang sampel memilih 12 ikan dari 15 ikan adalah 455.

- a) Banyak cara memilih 10 ikan lele dari 10 ikan lele dan memilih 2 ikan gurame dari 5 ikan gurame, dihitung menggunakan konsep kombinasi, yaitu:

$$C_{10}^{10} \times C_2^5 = 1 \times 10 = 10 \text{ cara.}$$

Artinya banyak kejadian terambilnya 10 ikan lele dan 2 ikan gurame adalah 10 cara.

Jadi, peluang terambilnya 10 ikan lele dan 2 ikan gurame adalah:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Leftrightarrow \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$$

- ♦ Bagian b) dan c) kerjakan sebagai latihanmu.

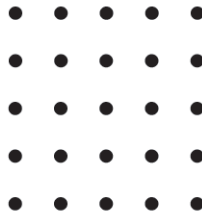


Uji Kompetensi 8.2

1. Di dalam sebuah kotak terdapat 10 bola yang sama tetapi berbeda warna. 5 bola berwarna merah, 3 bola berwarna putih, dan 2 bola berwarna kuning. Seorang anak mengambil 3 bola secara acak dari kotak. Tentukanlah:
 - a) Banyak cara pengambilan ketiga bola tersebut.
 - b) Banyak cara pengambilan ketiga bola dengan dua bola berwarna sama.
 - c) Banyak cara pengambilan ketiga bola tersebut dengan banyak bola berwarna merah selalu lebih banyak daripada banyak bola berwarna lainnya.
 - d) Banyak cara pengambilan ketiga bola jika bola berwarna kuning paling sedikit terambil 2.
2. Dari angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 akan dibuat bilangan dengan angka yang berbeda. Tentukanlah:
 - a) Banyak bilangan yang dapat dibentuk.
 - b) Banyak bilangan ribuan yang lebih besar atau sama dengan 4000.
 - c) Banyak bilangan ratusan dengan angka ratusan adalah bilangan prima.
 - d) Jika x adalah bilangan ratusan yang dapat dibentuk dari angka di atas, maka tentukan banyaknya bilangan ratusan yang memenuhi $250 < x < 750$.
 - e) Banyak bilangan ratusan dengan angka di posisi puluhan selalu lebih dari angka di posisi satuan.
3. Tentukan banyak kata berbeda yang dapat dibentuk dari huruf pembentuk kata:
 - a) ATURAN
 - b) INDONESIA
 - c) KURIKULUM
 - d) STATISTIKA
4. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk dari huruf pembentuk kata PERMUTASI dengan selalu mengandung unsur kata TAMU.
5. Sepuluh buku yaitu: 6 buku IPA, 2 buku IPS, dan 2 buku Bahasa akan disusun di atas meja. Tentukanlah:
 - a) Banyak susunan jika disusun berjajar.
 - b) Banyak susunan jika disusun berjajar dengan buku yang sejenis bidang ilmu berdekatan.
 - c) Banyak susunan jika disusun berjajar dengan buku IPA selalu berada di pinggir.

- d) Banyak susunan jika disusun secara siklis.
 - e) Banyak susunan jika disusun secara siklis dengan buku yang sejenis bidang ilmu berdekatan.
6. Bayu pergi menonton pertandingan sepak bola ke stadion. Jika stadion memiliki 5 pintu masuk/keluar maka tentukan banyak cara Bayu memilih masuk ke stadion dengan dan keluar melalui pintu yang berbeda.
7. Dua orang pergi menonton pertandingan sepak bola ke stadion. Jika stadion memiliki 6 pintu masuk/keluar maka:
- a. Tentukan banyak cara mereka memilih masuk ke stadion dengan masuk melalui pintu yang sama tetapi keluar dengan pintu yang berbeda.
 - b. Tentukan banyak cara mereka memilih masuk ke stadion dengan masuk melalui pintu yang sama tetapi mereka keluar dengan pintu yang berbeda dan tidak melalui pintu di saat mereka masuk.
8. Didalam sebuah kotak terdapat 12 bola yang sama dan berbeda warna, yaitu 6 bola berwarna Merah, 4 bola berwarna Biru, dan 2 berwarna hijau. Jika, seorang anak mengambil 3 bola secara acak maka tentukan:
- a. Peluang pengambilan ketiga bola tersebut
 - b. Peluang terambil 2 bola berwarna merah
 - c. Peluang terambil ketiga bola berbeda warna
 - d. Peluang terambil banyak bola berwarna merah selalu lebih banyak dari bola lainnya.
 - e. Peluang terambil banyak bola berwarna merah selalu lebih banyak dari banyak bola berwarna biru dan banyak bola berwarna biru lebih banyak dari bola berwarna hijau.
9. Di dalam kandang terdapat 40 ekor ayam, yaitu 18 ekor ayam jantan, 6 diantaranya berbulu tidak hitam dan 21 ekor ayam berwarna hitam. Ibu memilih 2 ekor ayam untuk dipotong, maka tentukanlah peluang bahwa ayam yang terpilih untuk dipotong adalah ayam betina berbulu tidak hitam.
10. Siti menyusun bilangan ratusan dari angka 0, 1, 2, 3, dan 5. Siti menuliskan setiap bilangan di kertas dan menggulungnya dan mengumpulkannya di dalam sebuah kotak. Siti meminta Udin mengambil sebuah gulungan secara acak. Tentukanlah:
- a. Peluang yang terambil adalah bilangan 123.
 - b. Peluang yang terambil adalah bilangan ganjil
 - c. Peluang yang terambil adalah bilangan dengan angka di posisi satuan adalah bilangan prima.
 - d. Peluang yang terambil adalah bilangan diantara 123 dan 321

11. Dua puluh lima titik disusun membentuk pola bilangan persegi (5×5), seperti gambar



Jika dibentuk segitiga dengan menghubungkan tiga titik maka tentukan banyak segitiga yang dapat dibentuk.

12. Didalam kelas terdapat 10 siswa (6 pria dan 4 wanita) sebagai calon pengurus OSIS, yaitu ketua, sekretaris dan bendahara. Tentukan peluang terpilih kepengurusan dengan:
- Kepengurusan tidak mempunyai persyaratan atau mereka semua berhak menduduki salah satu posisi.
 - Ketua dan sekretaris harus pria
 - Ketua, sekretaris harus pria dan bendahara harus seorang wanita
 - Ketua harus seorang pria.
13. Tunjukkan bahwa $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = 2^n$ dengan n bilangan bulat positif.
14. Jika P_k^n adalah permutasi k unsur dari n unsur dan C_k^n adalah kombinasi k unsur dari n unsur maka $C_{n+3}^{n+5} = 22$ maka tentukan nilai P_{n-5}^{n-3}
15. Jika P_k^n adalah permutasi k unsur dari n unsur dan C_k^n adalah kombinasi k unsur dari n unsur maka tentukan harga n yang memenuhi $P_{n-2}^n - P_{n-3}^n - P_{n-3}^{n+1} = C_{n-2}^n$

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep aturan pencacahan, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Aturan pencacahan merupakan metode untuk menentukan banyak cara/susunan/pilihan pada saat memilih k unsur dari n unsur yang tersedia. Aturan pencacahan ini meliputi perkalian berurut (faktorial), permutasi, dan kombinasi.
2. Faktorial dinyatakan dengan $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.
3. Permutasi adalah susunan k unsur dari n unsur tersedia dalam satu urutan. Terdapat tiga jenis unsur permutasi yakni 1. Permutasi dengan unsur-unsur yang berbeda, 2. Permutasi dengan unsur-unsur yang sama, dan 3. Permutasi siklis.

Secara umum banyak permutasi dinyatakan dengan: $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$.

4. Kombinasi adalah susunan k unsur dari n unsur tersedia dengan tanpa memperhatikan urutannya, dinyatakan dengan $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, dengan $n \geq k$.
5. Untuk kejadian majemuk, banyak anggota ruang sampel $n(S)$ suatu kejadian merupakan banyak cara/susunan suatu kejadian majemuk tersebut. Sedangkan banyak anggota kejadian $n(E)$ merupakan kombinasi atau permutasi suatu kejadian pada kejadian majemuk.
6. Peluang suatu kejadian *majemuk* (E) dirumuskan: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$.

Dengan memiliki sikap, pengetahuan, dan keterampilan akan aturan pecacahan dapat kamu aplikasikan mengatasi masalah dunia nyata. Untuk selanjutnya, konsep dasar aturan pencacahan ini akan membantu kamu memahami konsep peluang majemuk dan matematika diskrit. Selanjutnya kita akan membahas materi lingkaran, tentunya pengalaman belajar yang kita peroleh pada Bab VIII ini harus membantu cara berpikir kita memecahkan masalah.