

3-4 力學中的平衡概念

Physics

靜力學的平衡概念對你我來說應該不會陌生，例如小時候堆積木時你可能就已經是平衡的高手，曉得如何堆疊出穩固的摩天大樓模型了。然而在描述物體的運動狀態時，平衡這個名詞卻可能包含數種概念。實驗顯示出來，若一個物體所受到的所有外力之合力為零，則該物體就只會留在原地、或者做等速運動，而不會有任何的加速度，此時我們稱該物體達到了**平移平衡** (translational equilibrium)。而若物體的某一點是固定的，且相對於該點來說，物體所受到的合力矩為零，則它的轉動狀態就不會被改變，此時該物體便達到了**轉動平衡** (rotational equilibrium)。如果物體是靜止的，且其所受到的合力以及合力矩都為零，則稱它已達到**靜力平衡** (static equilibrium)。一個達到靜力平衡的物體會繼續保持靜止。

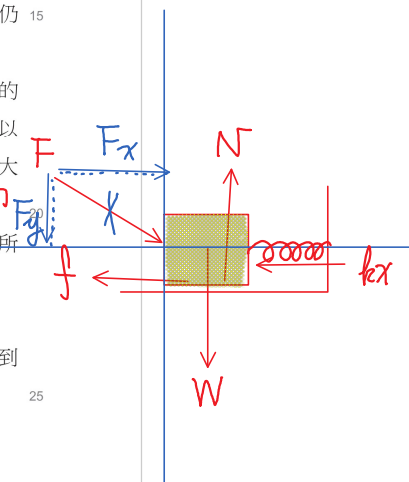
平移平衡以及轉動平衡的概念是互相獨立的。例如，將靜置在地面或桌面上之電風扇的開關打開，電風扇的扇葉便開始加速旋轉起來，若將扇葉視為單獨一個系統，則扇葉顯然沒有達到轉動平衡。但因為它仍隨電風扇本體屹立不動地停留在原地，因此它已經達到平移平衡。

上述三種力學中的平衡概念在日常生活中隨處可見。也正因為它的應用五花八門，因此對於初學者來說有時會造成困擾。但是若能把握以下力學解題策略的數個基本原則，則對於問題的分析與理解常會有很大的幫助：

- (1) 確定分析的對象，然後將問題中物體所受到的外力一一標出，畫出所調的**自由體受力圖** (free-body diagram)，簡稱力圖。
- (2) 取適當的坐標系，將物體所受到的作用力以數值表示出來。
- (3) 根據問題中物體所達到的平衡特性來列出其平衡的條件（例如，達到平移平衡的物體其受到的合力必須是零），並進一步求解。

25

$$\begin{cases} F_{\text{向上}} = F_{\text{向下}} \\ F_{\text{向左}} = F_{\text{向右}} \\ \star \tau_{\text{順}} = \tau_{\text{逆}} \end{cases}$$



(4)通過計算、解決原始問題後、回頭檢視所獲得之解答的物理意義甚至將之推廣。如此不但可以幫助判斷答案的正確性，亦可以加深對此中物理的了解。

以下我們利用範例 3-6、3-7 及 3-8 來說明這個策略。

5 範例 3-6

爸爸媽媽帶著三歲的阿明去溜滑梯。阿明的體重是 14 公斤，滑梯的傾斜角度為 30° ，在還沒放手之前，爸爸於滑梯頂端用手以平行滑梯方向的力抓住阿明，如圖 3-22 所示。若不計滑梯面上的摩擦力，則

10 爸爸須施力多大才可拉住阿明，使他靜止在滑梯上？

解答

步驟一：確定對象，將力圖畫出來。

題目問的是爸爸施多少力於阿明身上，所以必須徹底了解阿明所受到的外力有哪些。我們發現外力共有三個：

15 他本身的重量 $W = 14 \text{ kgw}$ （鉛直向下），來自爸爸的拉力 F （方向平行於滑梯），以及滑梯施予他的垂直正向力 N 。我們將其力圖顯示在圖 3-23 中。

步驟二：選定坐標系，並將作用力表示出來。

選取坐標系，使得沿著滑梯往下的方向為 $+x$ 的方向，而垂直滑梯面的向上方向為 $+y$ 方向（圖 3-24）。則阿明所受到的三個外力之向量表示為：

1. 他本身的重量：

$$\vec{W} = (14 \sin 30^\circ, -14 \cos 30^\circ)$$

2. 來自爸爸的拉力：

$$\vec{F} = (-F, 0)$$

3. 滑梯施與他的垂直正向力：

$$\vec{N} = (0, N)$$

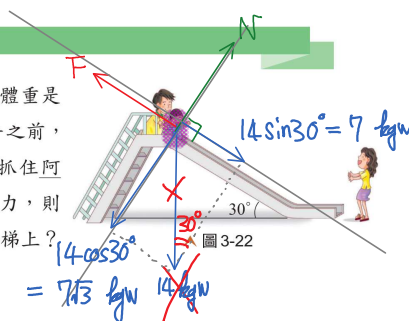


圖 3-22

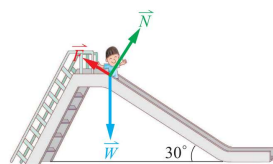


圖 3-23

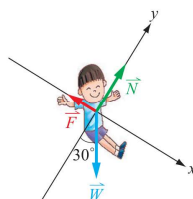


圖 3-24

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 7 \text{ (kgw)} \# \\ N = 7\sqrt{3} \text{ (kgw)} \\ \tau_{\text{順}} = \tau_{\text{逆}} \end{array} \right.$$

步驟三：套用平移平衡的條件。

由於阿明是處於平移平衡的狀態，所以他所受的外力和必需為零。因此，以公斤重當作單位，則：

$$\begin{aligned}\vec{W} + \vec{F} + \vec{N} &= (0, 0) \\ \Rightarrow (14 \sin 30^\circ, -14 \cos 30^\circ) + (-F, 0) + (0, N) &= (0, 0) \\ \Rightarrow (14 \sin 30^\circ - F, -14 \cos 30^\circ + N) &= (0, 0)\end{aligned}\quad 5$$

因此，

$$F = 14 \sin 30^\circ = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7.0 \text{ (kgw)}$$

亦即，爸爸必須以 7.0 公斤重的拉力將阿明拉住。此外，我們還獲得了額外的一個資訊（雖然題目並沒有問及）：滑梯對阿明所施的垂直正向力為

$$N = 14 \cos 30^\circ \approx 12 \text{ (kgw)} \quad 10$$

步驟四：檢視所獲解答的物理意義。

阿明的體重是 14 公斤，但是爸爸將他拉住卻只需要 7.0 公斤重的力！這是怎麼一回事呢？

透過本題，我們體會到了「斜面」(inclined plane)的好處：由於斜面也會對物體施力（即題中解出的正向力 $\vec{N}$ ），此力的存在使得爸爸不用在鉛直方向施力，同時也減輕了爸爸的負擔！原來平凡無奇、鮮少被人注意到的正向力竟然也在應用上扮演著重要的角色！

在以上的例題中，我們利用選定的坐標系將阿明的重量表示成

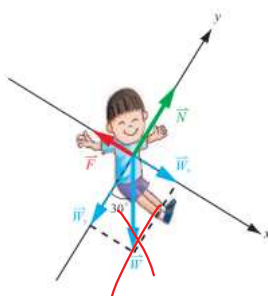
$$\vec{W} = (14 \sin 30^\circ, -14 \cos 30^\circ)$$

以物理的語言來說，這代表了我們為了計算方便，

- 5 已經把他的重量分解成平行於梯面以及垂直於梯面的兩個分力，如圖 3-25 所示。於是阿明處於平
- 移平衡狀態的條件就變成這兩個分力必須分別和 $\vec{F}$ 以及 $\vec{N}$ 抵銷。

在此必須特別提醒你：把一個力分解成兩個

- 10 分力只是為了方便計算；而一旦把一個力分解成兩個分力，則原來力的所有作用就完全被這兩個分力所取代了。因此千萬不要把原始的那個力以及為了方便而引入的分力全部納入你的計算過程中！



▲ 圖 3-25 阿明的重量可以分解成平行於梯面以及垂直於梯面的兩個分力。

小知識 從極端特例去猜答案

在物理中我們有時可以試著從極端的狀況中去設法猜出問題的答案。以範例 3-6 來舉個例子。我們透過數學分析學到了斜面的一個好處是：它使爸爸可以沿著斜面僅以 7.0 公斤重的力去拉住重量為 14 公斤的阿明。如果溜滑梯的傾斜角從 30° 變成 35° ，則在不進行任何計算的情況下，你可否猜出爸爸沿著斜面的施力是會大於或小於 7.0 公斤重？

要回答這個問題，我們可以嘗試讓溜滑梯的傾斜角取極端值，例如 0° （即斜面成為水平）或 90° （即斜面成為鉛直），看看此時爸爸需要使出多大的力去拉住阿明，然後猜出爸爸所需施力與傾斜角度間的定性關係。現在請你根據以上的提示去回答原始的問題吧！

範例 3-7

一隻 10 公斤重的猴子以雙臂懸吊在樹枝上，如圖 3-26 所示。經分析圖片後發現其右臂與鉛直方向的夾角為 30° ，而其左臂與鉛直方向的夾角則為 45° 。請利用此資訊算出牠為了撐住自身體重，左右臂所需承受的力量值各為何？

解答

步驟一及二：先將力圖畫出來，並選取適當的坐標系。

本問題中包含了三個力：猴子本身的重量 $W = 10 \text{ kgw}$ （鉛直向下），以及來自雙臂的斜向拉力 $\vec{F}_R$ 以及 $\vec{F}_L$ 。我們將其力圖以及針對這個問題選擇的坐標系顯示在圖 3-27 中。

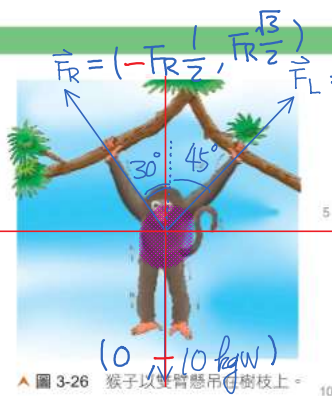
步驟三：套用平移平衡的條件。

由於猴子是處於平衡的狀態，所以牠所受的外力和必需為零。因此，以公斤重當作單位，則：

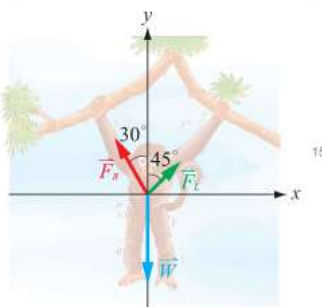
$$\begin{aligned}\vec{W} + \vec{F}_R + \vec{F}_L &= (0, 0) \\ \Rightarrow (0, -10 \text{ kgw}) &+ (-F_R \sin 30^\circ, F_R \cos 30^\circ) \\ &+ (F_L \sin 45^\circ, F_L \cos 45^\circ) \\ &= (0, 0) \\ \Rightarrow (-F_R \sin 30^\circ + F_L \sin 45^\circ, -10 \text{ kgw} + F_R \cos 30^\circ + F_L \cos 45^\circ) &= (0, 0)\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{cases} -F_R \sin 30^\circ + F_L \sin 45^\circ = 0 \\ -10 \text{ kgw} + F_R \cos 30^\circ + F_L \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$



▲ 圖 3-26 猴子以雙臂懸吊在樹枝上。



▲ 圖 3-27 猴子懸吊在樹枝上之力圖與分析問題所使用之坐標系。

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \left(\frac{F_L}{\sqrt{2}}, \frac{F_L}{\sqrt{2}} \right) \\ \vec{F}_R &= \left(-\frac{F_R}{2}, \frac{\sqrt{3}F_R}{2} \right) \\ \vec{W} &= (0, -10) \\ 0 &= \left(\frac{F_L}{\sqrt{2}} - \frac{F_R}{2}, \frac{F_L}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}F_R}{2} - 10 \right) \\ \therefore F_L &= 5.2 (\text{kgw}) \\ F_R &= 7.3 (\text{kgw})\end{aligned}$$

$\tau_{\text{順}} = \tau_{\text{逆}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F_R \cdot \frac{1}{2} + F_L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & \text{①} \\ -10 \text{ kgw} + F_R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F_L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & \text{②} \end{cases}$$

聯立解①及②兩式可得：

$$\begin{cases} F_L = \frac{20 \text{ kgw}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 5.2 \text{ kgw} \\ F_R = \frac{20\sqrt{2} \text{ kgw}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 7.3 \text{ kgw} \end{cases}$$

步驟四：檢視所獲解答的物理意義。

以上解答顯示出來，猴子的左臂承受之力比右臂小，為什麼？原因很簡單：因為其左臂比右臂更接近水平的方向。一旦了解此中物理意義，你是否可以在不作任何計算的情況下，直接看出圖 3-28 中共同抬一重物的兩人何者出力較大？

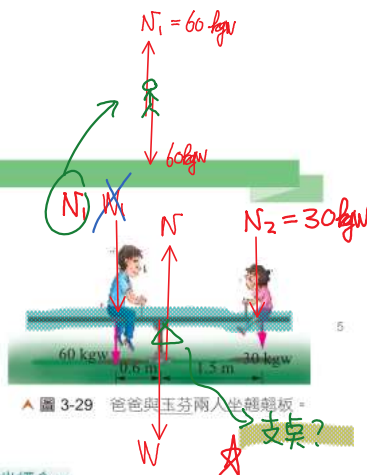


▲ 圖 3-28 在不作任何計算的情況下，直接判斷共同抬一重物的兩人何者出力較大。

範例 3-8

爸爸與玉芬兩人坐翹翹板，爸爸重 60 公斤重，離中央支點 0.6 公尺，玉芬重 30 公斤重，離中央支點 1.5 公尺，如圖 3-29 所示。請問：

- (1) 翹翹板會平衡嗎？
- (2) 若翹翹板會轉動，則爸爸應坐在哪裡才可使翹翹板達到轉動平衡？



▲ 圖 3-29 爸爸與玉芬兩人坐翹翹板。

解答

- (1) 步驟一及二：先將力圖畫出來，並選取適當的坐標系。

由於本問題討論的是對於中央支點的轉動平衡，所以會造成力矩最關鍵的力有兩個，即爸爸以及玉芬的重量，而此二力已經顯示在圖 3-29 中。此外，我們可以選擇坐標系，使得中央支點即為原點，並以水平方向的右方當成是 $+x$ 軸。

步驟三：討論所給定的系統是否滿足轉動平衡的條件。

滿足轉動平衡的條件為逆時針方向的力矩必須和順時針方向的力矩完全抵銷。

爸爸體重對中央支點造成的力矩是逆時針方向，其量值為

$$\tau_1 = (0.6 \text{ m})(60 \text{ kgw}) = 36 \text{ kgw} \cdot \text{m}$$

而玉芬的體重對中央支點所造成的力矩是順時針方向，其量值為

$$\tau_2 = (1.5 \text{ m})(30 \text{ kgw}) = 45 \text{ kgw} \cdot \text{m}$$

所以其合力矩為 $36 \text{ kgw} \cdot \text{m} - 45 \text{ kgw} \cdot \text{m} = -9 \text{ kgw} \cdot \text{m}$ 。這表示翹翹板會順時針轉動。

- (2) 假設爸爸坐在離中央支點 ℓ 的距離處恰可以使整個系統達到轉動平衡，

則套用平衡的條件可知

$$\ell(60 \text{ kgw}) - (1.5 \text{ m})(30 \text{ kgw}) = 0$$

於是可解出 $\ell = 0.75 \text{ m}$ 。

步驟四：檢視所獲解答的物理意義，並將之推廣。

爸爸的體重是玉芬體重的兩倍，所以爸爸所坐位置離中央支點的距離只是玉芬位置到中央支點距離的一半便可達到平衡。想一想，如果將玉芬換成體重是 20 公斤的妹妹，則爸爸要坐在哪裡才可達到平衡？只要將此中道理想明白了，則你對於從國中課程中就已經學過的所謂槓桿 (lever) 的認識就相當清楚了。

$$\left\{ \begin{array}{l} N = W + 60 + 30 \\ 0 = 0 \\ \tau_{\text{順}} \neq \tau_{\text{逆}} \end{array} \right.$$

$$0.6 \times 60 < 0.5 \times 30$$

$\tau_{\text{逆}} \quad \tau_{\text{順}}$
 順時針 ↻ 轉

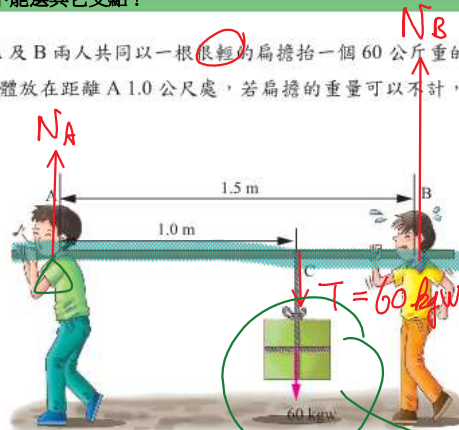
(2)

$$d \times 60 = 1.5 \times 30$$

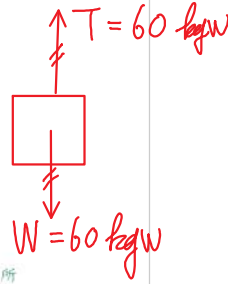
$$\Rightarrow d = 0.75 \text{ (m)} \#$$

範例 3-9 能不能選其它支點？

在圖 3-30 中，A 及 B 兩人共同以一根很輕的扁擔抬一個 60 公斤重的物體，兩人相距 1.5 公尺，物體放在距離 A 1.0 公尺處，若扁擔的重量可以不計，則兩人各施力多大？



▲圖 3-30 兩人以一根很輕的扁擔共同抬一個物體。



$$\begin{cases} N_A + N_B = 60 \\ 0 = 0 \\ 1 \times 60 = 1.5 \times N_B \\ \tau_{\text{順}} \quad \tau_{\text{逆}} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} N_B = 40 \text{ (kgw)} \\ N_A = 20 \text{ (kgw)} \end{cases} \#$$

5 解答

假設 A、B 兩人肩膀各施以一個鉛直向上的力 F_A 及 F_B ，則因為扁擔是處於靜力平衡，所以合力為零：

$$F_A + F_B - 60 \text{ kgw} = 0 \quad (1)$$

此外，若以 C 這個位置當作支點，則其合力矩也必須是零：

$$(0.5 \text{ m}) F_B - (1.0 \text{ m}) F_A = 0 \quad (2)$$

從以上①及②式我們可以解得

$$F_A = 20 \text{ kgw} \text{ 及 } F_B = 40 \text{ kgw}$$

所以離支點比較近的 B 必須承受比較大的力。

在解範例 3-9 時，我們是以 C 點當作支點來計算合力矩，但是你可能會想到：既然整個系統是達到靜力平衡，每個點都是固定的，那可不可以用別的點當作支點呢？

答案是肯定，的確可以用別的點作支點。事實上，當一個物體是處於靜力平衡時，我們可以取任何一個參考點當作支點來計算力矩，而且所獲得的結果都會一致。

選有最多力量通過處，簡化計算

我們可以利用同一個例題來說明以上這段文字。假若我們將 C 點當作原點，而希望改把距離 C 點右方 x 長度處的 D 點當作支點來計算合力矩（圖 3-31），則此時相對於 D 點的合力矩為

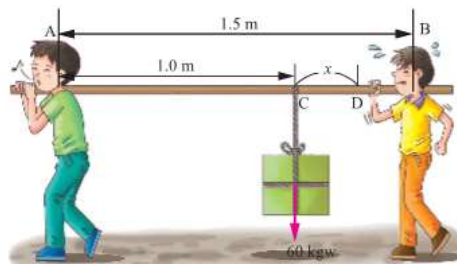
$$\begin{aligned}\tau_D &= (0.5 \text{ m} - x) F_B - (1.0 \text{ m} + x) F_A + x (60 \text{ kgw}) \\ &= [(0.5 \text{ m}) F_B - (1.0 \text{ m}) F_A] - x (F_B + F_A - 60 \text{ kgw}) \\ &= \tau_C - x (F_B + F_A - 60 \text{ kgw})\end{aligned}$$

其中， τ_C 是以 C 點為支點的合力矩。但由於靜力平衡的另一條件是

$$F_B + F_A - 60 \text{ kgw} = 0$$

所以

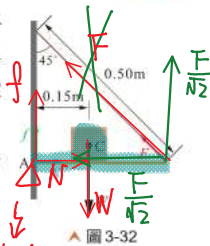
$$\tau_D = \tau_C$$



▲ 圖 3-31 改用距離 C 右方的長度 x 處的 D 點當作支點來計算合力矩。

範例 3-10 到底要如何選取對象？

如圖 3-32 所示，將一個重量為 $W = 5.0$ 公斤重的物體放在質量可以不計的堅固水平薄板上，且薄板的右端用一繫在牆上的輕繩撐住。假設繩子傾斜 45° ，長度為 0.50 m，而物體中心 C 與牆壁之距離為 0.15 m。請計算繩子所承受的張力 F 、薄板左端緊貼牆壁處 A 受到的鉛直向上的力 f 以及水平方向的力 N 的數值。張力 F 比物體重量 W 大還是小？



解答

因為物體是處於靜力平衡，所以

- 10 鉛直方向的合力為零：

$$F \cos 45^\circ + f - 5.0 \text{ kgw} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F + f = 5.0 \text{ kgw}$$

水平方向的合力也是零：

$$N - F \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

此外，若以薄板與牆壁的接觸點 A 當作支點，則其合力矩也必須是零：

- 15
- $(-0.15 \text{ m})(5.0 \text{ kgw}) + (0.50 \text{ m})(\sin 45^\circ)(F \cos 45^\circ) = 0$
-
- $\Rightarrow -0.75 \text{ m} \cdot \text{kgw} + (0.25 \text{ m}) F = 0 \Rightarrow F = 3.0 \text{ kgw}$
-
- 所以

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2} F = 2.1 \text{ kgw}$$

$$\text{而 } f = 5.0 \text{ kgw} - \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

- 20
- $= 5.0 \text{ kgw} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(3.0 \text{ kgw}) = 2.9 \text{ kgw}$

所以張力 $F = 3.0$ kgw 比物體真實的重量 $W = 5.0$ kgw 小！為什麼會這樣呢？回頭檢視圖 3-32 以及計算出來的 $f = 2.9$ kgw 此結果，我們立刻發現：

原來是牆壁作用於薄板之力在扮演「助手」的角色！

$$Y: f + \frac{F}{\sqrt{2}} = W$$

$$X: N = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

$$Z: 0.15W = \frac{0.5}{\sqrt{2}} \times \frac{F}{\sqrt{2}}$$

↑ 順
↑ 逆

$$f = \left(1 - \frac{3}{5\sqrt{2}}\right)W = 2.9 (\text{kgw})$$

$$\Rightarrow N = \frac{3W}{5\sqrt{2}} = 2.1 (\text{kgw})$$

$$\Rightarrow F = 0.6W = 3 (\text{kgw})$$

範例 3-11 輕繩與滑輪

滑輪 (pulley) 的發明增加了許多生活及工程上的便利性，例如在建築施工的現場往往可見滑輪組的蹤跡 (圖 3-33)，因為滑輪的適當組合不但可以改變施力的方向，也可以幫助省力。如圖 3-34 所示，若我們利用這個滑輪組來舉起重量為 W 的重物。假設摩擦力很小，而且繩子與滑輪的重量均可以不計，請計算手向下拉所需施的力。天花板總共所須承擔的力又是多大呢？

解答

對於 A 處的滑輪來說，若以 A 點當作支點，則左右兩繩上的張力 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 所造成的力矩必須互相抵銷。但由於兩者的力臂都相同 (都等於滑輪的半徑)，因此 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 兩力的量值必定相等。同理，若以 B 點當作支點，則可看出兩繩上的張力 $\vec{F}_3$ 、 $\vec{F}_4$ 的量值也相等，而且 $\vec{W} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ 。

此外，由於繩子的重量可以被忽略，所以 $\vec{F}_2$ 、 $\vec{F}_3$ 兩力也必須互相抵銷。因此我們有以下的等式：

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$$

$$W = F_3 + F_4$$

這表示 $F_1 = 0.5W$ ，而且天花板所受到的往下總力為

$$W + F_1 = 1.5W$$

以上結果表明了：雖然滑輪可以幫忙省力，但是天花板卻也因此必須承擔比原物重更大的力。因此我們不能一味地只想省力，而忽略了支撐滑輪組的建築之結構安全。



圖 3-33 在建築施工的現場往往便可看見滑輪組的蹤跡。

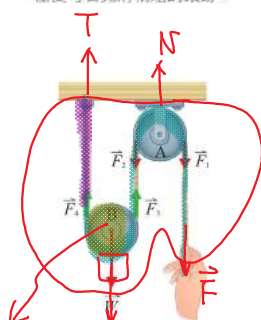


圖 3-34 滑輪的組合可以改變施力的方向，並幫助省力。

5

10

15

20

$$T + N = W + F$$

$$0 = 0$$

$$T_{\text{順}} = T_{\text{逆}}$$

對“輕繩”而言，處處張力相等

$$T = W_T + F_4$$

$$T = F_4 = F_3 = F_2 = F_1 = F$$

$$\therefore T = \frac{W}{2}, N = W \#$$



▲ 圖 3-35 切葉蟻是能撐起自身體重 20 倍之物體的力學平衡高手。

能夠將生活中各式各樣靜力平衡的實例歸納成為兩條簡單的規則（合力以及合力矩都必須是零），這確實是力學研究中很有趣的成就。但是你知道嗎，大自然中有一種切葉蟻，它不但能撐起自身體重 20 倍的物體，而且還是一個平衡高手（圖 3-35），能以同一個姿勢將葉子豎起來扛回巢穴而絕少出現閃失！

小知識 簡單機械

本章的範例已經討論過槓桿、斜面以及滑輪等常見的簡單機械。其實類似的應用琳瑯滿目，每一樣都是前人智慧的結晶。例如輪軸（wheel and axle）是由兩個半徑不等的圓柱固定在同一軸心上而組成（圖 3-36 (a)）。輪與軸屬於同心圓，支點便是圓心，其主要功用除了可以改變力的方向，也可以藉由施力在輪上而達到省力的目的，或者是施力在軸上而達到省時的目的。圖 3-36 (b) 中的螺絲起子是輪軸的應用，但圖 3-36 (c) 中被它旋轉的螺絲則可以看成是斜面的變形。



▲ 圖 3-36 數種簡單機械：(a)輪軸；(b)螺絲起子；(c)螺絲。