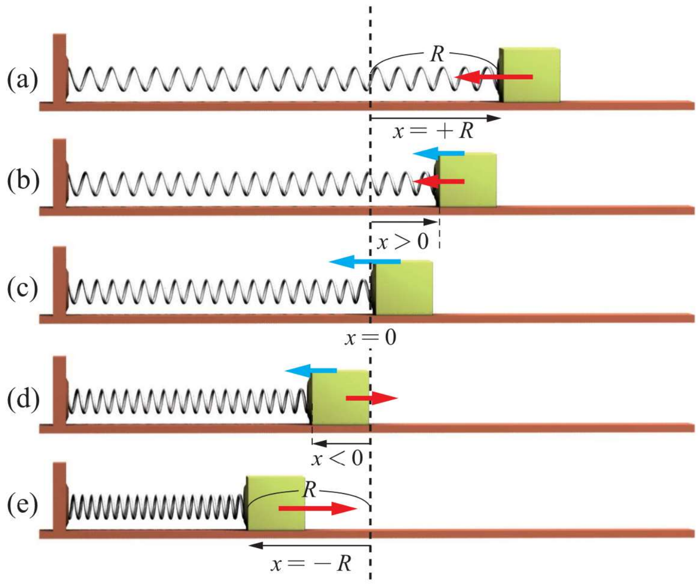
5-2 簡諧運動

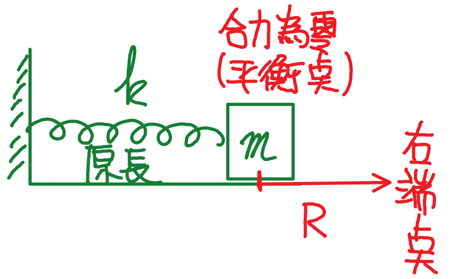
在日常生活中可以看到許多週期性的振動現象，例如繫於彈簧一端之木塊的振動、吊燈或鐘擺的小角度擺動、樂器簧片的微幅振動等。上述振動現象看似不同，其實都具有相同運動模式。

1 繫於彈簧一端之木塊的振動

將一木塊繫在彈簧端點，一起放置於光滑水平桌上，彈簧的另一端固定於牆上。當彈簧未被伸長或壓縮時，木塊所受淨力為零，此時位置稱為平衡點，將平衡點訂定為原點，方向向右為正，方向向左為負。如圖 5-23 (a)所示，施力使彈簧向右伸長，木塊離開平衡點的距離為 R 後放手，由於彈簧回復力作用在木塊上，使得木塊由靜止開始向左移動。因為回復力產生方向向左的加速度，所以木塊的速度會愈來愈快（圖 5-23 (b)）。當木塊抵達平衡點時，雖然回復力為零，但仍有速度，會繼續向左運動（圖 5-23 (c)）。木塊向左通過平衡點後，由於彈簧開始



▲ 圖 5-23　繫於彈簧一端之木塊作簡諧運動，紅色箭頭代表木塊加速度，藍色箭頭代表木塊速度，黑色箭頭代表木塊偏離平衡點的位移。



$$-kx = ma$$

$$\Rightarrow -kx = mx''$$

微分方程式

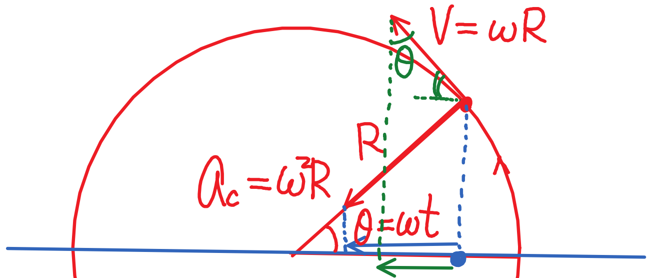
$x(t)$

$\downarrow$ 微

$v(t) = x'$

$\downarrow$ 微

$a(t) = v' = x''$



$x(t) = R\cos(\omega t)$

$v(t) = -\omega R\sin(\omega t)$

$a(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$

※ 三角函數的微分

$\sin(\omega t)$

$\downarrow$ 微

$\omega\cos(\omega t)$

$\downarrow$ 微

$-\omega^2\sin(\omega t)$

$$a = -\omega^2 x$$

$x(t) = R\cos(\omega t)$

$\downarrow$ 微

$v(t) = -\omega R\sin(\omega t)$

$\downarrow$ 微

$a(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$

※ $\begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ v = -\omega R\sin(\omega t) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{R} = \cos(\omega t) \\ \dfrac{v}{\omega R} = -\sin(\omega t) \end{cases}$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^2}_{\cos^2} + \underbrace{\left(\frac{v}{\omega R}\right)^2}_{\sin^2} = 1$$

$$\omega^2 x^2 + v^2 = \omega^2 R^2$$

$$\therefore v^2 = \omega^2(R^2 - x^2)$$

$$v = \pm\omega\sqrt{R^2 - x^2} \ \#$$

平衡點 $x=0$	端點 $x=R$
$v_{max} = \omega R$	$v_{min} = 0$
$a_{min} = 0$	$a_{max} = \omega^2 R$

$$\left.\begin{array}{l} F = -kx \\ \ \ \| \\ ma \end{array}\right\} \ a = -\frac{k}{m}x$$

另 $a = -\omega^2 x$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ \# \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ \#$$

被壓縮，彈簧作用在木塊的回復力與其產生的加速度方向變成向右，使得木塊開始減速（圖 5-23 (d)）。當木塊速率為零時，此時抵達最左邊，離開平衡點的距離亦為 R。此時木塊仍受回復力向右作用，隨即開始折返，向右運動（圖 5-23 (e)）。木塊會再度向右通過平衡點，並且回到原始位置。木塊如此來回振動，就形成了週期性的運動。

根據虎克定律，當木塊偏離平衡點的位移為 x，彈簧作用在木塊的回復力 F 與 x 成正比，兩者的方向相反。故 F 與 x 的數學關係可表示為

$$F = -\,k_s x \qquad \text{5-9 式}$$

式中的 k_s 為彈簧的力常數，負號代表 F 與 x 的方向相反。若木塊的質量為 m，應用牛頓第二運動定律，木塊的加速度 a 為

S.H. Oscillation

$$a = -\frac{k_s}{m}x \qquad \text{5-10 式}$$

受到与位移成正比的回復力 ⇒ S.H.M.

由上式可知，木塊的加速度 a 與其偏離平衡點的位移 x 成正比，兩者的方向相反，此種運動為**簡諧運動**（simple harmonic motion），**簡稱為** SHM。木塊來回往返運動一次的時間稱為簡諧運動週期 T，離開平衡點最遠的位置稱為端點，離開平衡點最遠的距離 R 稱為**振幅**（amplitude）。平衡點為 $x = 0$，若令方向向右為正（向左為負），則兩端點為 $x = \pm R$，本節討論的是一維的簡諧運動，因此所有向量的方向均以正負號來表示。

想一想

彈性球由高空自靜止自由下落，碰撞光滑地面後又反彈至相同高度，如此不斷地上下跳動，這是簡諧運動的例子嗎？為什麼？

2 簡諧運動的位置、速度及加速度

等速圓周運動與簡諧運動皆為週期性的運動，如圖 5-24 所示，一小球在水平面上作等速圓周運動，從其側面以平行光照射之，則豎立在另一側的光屏上會顯示出小球的投影軌跡。從底下討論，我們將看到球影來回往復運動其實就是簡諧運動。

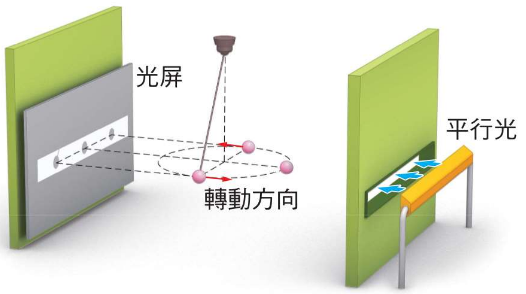


圖 5-24　簡諧運動的模擬實驗。當小球在水平面上作等速圓周運動時，以平行光從側面照射，則小球在光屏上的投影會在一直線上作簡諧運動。

設小球作圓周運動的半徑為 R，角速度為 ω，即週期為 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。如圖 5-25 所示，時間為 0 時位於 P_0 的小球，在時刻 t 時運動至 P 點位置。因為小球對圓心轉動了角度 ωt，故 $\overline{OP}$ 和 x 軸之間的夾角為 ωt。

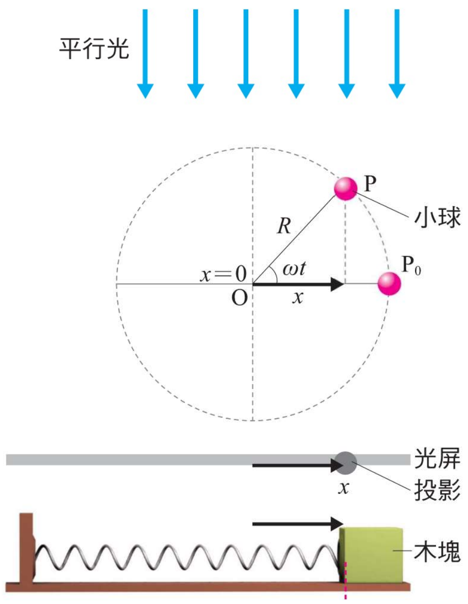


圖 5-25　小球作等速圓周運動的位置 P 在直徑方向的投影可得木塊作簡諧運動的位置 x，其中 P_0 為 $t=0$ 的位置。

令圓心 O 的投影處為 $x = 0$，在時刻 t，小球投影的位置 x 為

$$x = R\cos(\omega t)$$ 5-11 式

小球運動的向心加速度量值 $a = \omega^2 R$。由圖 5-26 可得此時小球投影的加速度 a_x 為

$$a_x = -a\cos(\omega t)$$
$$= -\omega^2 R\cos(\omega t)$$ 5-12 式

由（5-11）和（5-12）兩式可得小球投影的位移和加速度之間的關係為

$$a_x = -\omega^2 x$$ 5-13 式

$F = ma = -m\omega^2 x \propto x$　S.H.O.

由上式可知，a_x 與 x 成正比，而兩者的方向恆為相反，即小球投影所呈現的運動型態與木塊作簡諧運動的型態相同。因此**我們可以利用作等速圓周運動的小球在直徑方向的投影來模擬簡諧運動，而此圓周運動稱為簡諧運動的參考圓** (reference circle)，但是要特別注意，作等速圓周運動的小球本身並非作簡諧運動。

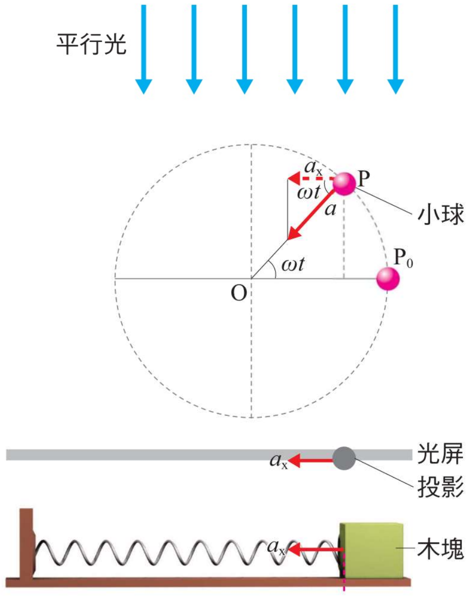


圖 5-26　小球作等速圓周運動的向心加速度 a 在直徑方向的投影可得木塊作簡諧運動的加速度 a_x。

我們若欲求上述簡諧運動位置 x 時的速度 v_x，可以利用小球運動的速度量值 $v = \omega R$，由圖 5-27 可得小球投影的速度 v_x 為

$$\begin{aligned} v_x &= -v\sin(\omega t) \\ &= -\omega R\sin(\omega t) \end{aligned} \qquad \text{5-14 式}$$

由（5-11）式和（5-14）式可得簡諧運動的位置 x 和速度 v_x 之間的關係為

$$v_x = \pm\omega\sqrt{R^2 - x^2} \qquad \text{5-15 式}$$

在（5-11）式至（5-15）式中，圓周運動的半徑 R 即為其所模擬的簡諧運動振幅 R，圓周運動的角速度 ω 在模擬的簡諧運動稱為角頻率 ω（運動週期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$）。

$\omega = 2\pi f$

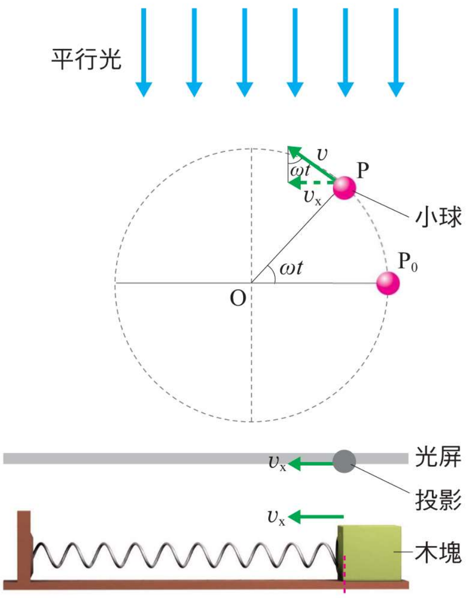


圖 5-27　小球作等速圓周運動的速度 v 在直徑方向的投影可得木塊作簡諧運動的速度 v_x。

由式（5-11）式和（5-12）式及（5-14）式可畫出簡諧運動的位置 x、速度 v_x、加速度 a_x 與時間 t 的關係圖，如圖 5-28 所示。

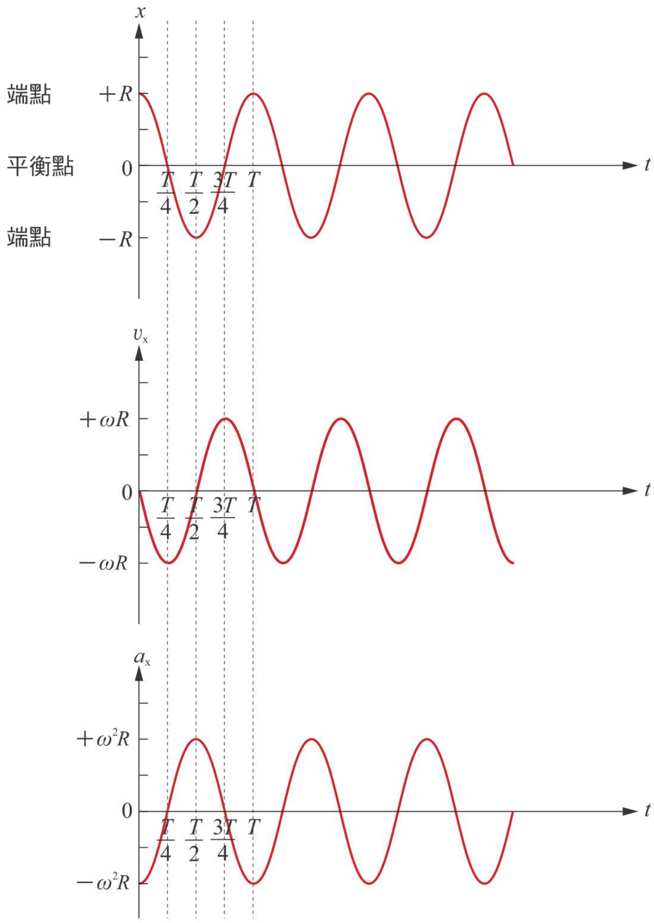


圖 5-28　簡諧運動的位移 x、速度 v_x、加速度 a_x 與時間 t 的關係圖，其中 R 為振幅，ω 為角頻率，T 為週期，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。

由圖 5-28 可知，質點在平衡點處（$x=0$）的加速度為零，此時的速率達最大值 ωR；當質點在兩端點處（$x=\pm R$），其速率為零，但此時加速度量值為最大值 $\omega^2 R$，如表 5-1 所示。

表 5-1　作簡諧運動之質點在端點與平衡點的速度量值及加速度量值

合力為零

	端　點（$x=\pm R$）	平衡點（$x=0$）
速度量值	v_{min} 0	ωR（最大值）
加速度量值	$\omega^2 R$（最大值）	0 a_{min}

3 簡諧運動的實例

若作簡諧運動之質點的質量為 m，由（5-13）式，作用在質點運動方向的淨力 F 為

$$F = ma_x = -(m\omega^2)x = -kx \qquad \text{5-16 式}$$

由（5-16）式可知，當質點作簡諧運動，質點所受的淨力和其離平衡點的位移 x 成正比，**但兩者的方向相反**，且 ω 等於 $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，故運動週期 T 為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{5-17 式}$$

在（5-16）式及（5-17）式中，k 為一比例常數，k 與運動方向的淨力 F 來源有關，例如在圖 5-23 中，比例常數 k 即為彈簧的力常數 k_s。可得木塊作簡諧運動的振動週期 T 為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_s}} \qquad \text{5-18 式}$$

由上式可知，物體繫於彈簧一端作簡諧運動時，振動週期 T 只和彈簧的力常數 k_s 以及所繫物體的質量 m 有關，和運動振幅 R 並無關係。

$T \neq 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (s) $\quad \dfrac{(N/m = \cancel{kg}\cdot m/s^2/\cancel{m})}{(\cancel{kg})}$ $\quad \sqrt{\dfrac{1}{s^2}} = \dfrac{1}{s}$

想一想

若木塊繫於彈簧一端作簡諧運動過程中，一塊黏土由高空落下，且迅速地與木塊附著，簡諧運動的週期有何變化？

$x(t) = R\cos(\omega t)$ $\quad v = \pm\omega\sqrt{R^2 - x^2}$

$v(t) = -\omega R\sin(\omega t)$ $\quad a = -\omega^2 x$

$a(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$ $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

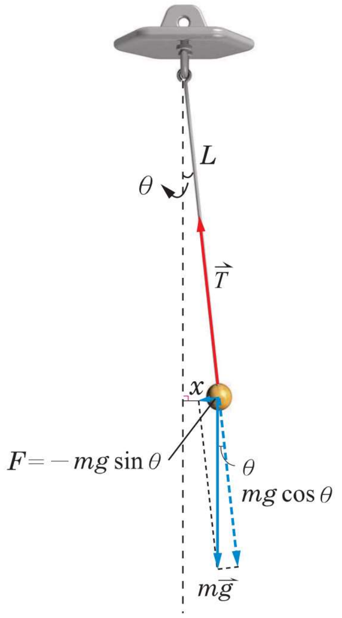
如圖 5-29 所示，一單擺的擺繩長度為 L，擺錘質量為 m。若擺繩的質量可以不計，且忽略所有摩擦力。以最低點為原點 $x=0$，當擺角為 θ 之瞬間，擺錘水平位置為 x，則擺錘沿運動方向所受的淨力 F 為

回復力

$$F=-mg\sin\theta=-\left(\frac{mg}{L}\right)x \quad \text{5-19 式}$$

上式中的負號表示方向向左。

若單擺作小角度（小於 5°[註]）擺動時，則擺錘可視為在一直線作簡諧運動。比較（5-16）式與（5-19）式，可得比例常數 $k=\frac{mg}{L}$，代入（5-17）式，則單擺的擺動週期 T 為



▲ 圖 5-29　單擺擺動時擺錘受重力 $m\vec{g}$ 及繩子之張力 $\vec{T}$

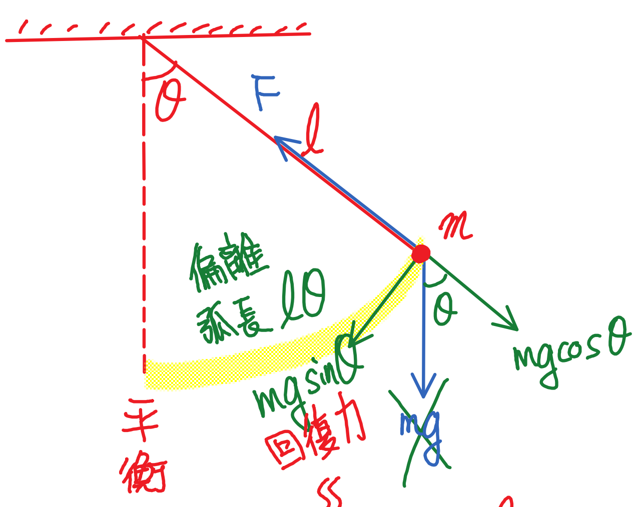
$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{5-20 式}$$

由上式可見在小角度擺動的條件下，單擺的擺動週期 T 只和擺繩長度 L 及重力加速度 g 有關，和擺錘質量 m 及擺角大小（小於 5°）均無關。

想一想

將單擺繫於一靜止的電梯之天花板，在小角度擺動的條件下，擺動週期為 T，當電梯等速上升，擺動週期是否有變化？為什麼？

註 **單擺週期會隨著擺幅增大而變長，最大擺角為 23° 時，週期約比（5-20）式大 1%，最大擺角為 5° 時，週期約比（5-20）式大 0.048%。**

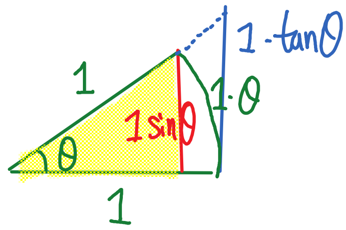


※ if $\theta \to 0$

$\sin\theta \approx \theta_{(rad)}$

$\sin 1^\circ \approx \cancel{1}$

$\sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180}$



$\wr\wr$

$mg\theta \propto l\theta$ 比例

$\therefore$ S.H.M.

$$mg\theta = k(l\theta) \Rightarrow k = \frac{mg}{l}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}g/l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ \#$$

S.H.M. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$　　單擺 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

範例 5-5

在光滑的水平面上，一力常數 k 為 4.0 牛頓/公尺的彈簧一端固定，另一端繫一質量 m 為 400 公克的物體，在兩端點間左右往返，作振幅 R 為 20 公分的簡諧運動。

(1) 運動週期為何？ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.4}{4}}=2(S)$#

(2) 運動過程的最大速率為何？ 在平衡點處有 $v_{MAX}=\omega R$

(3) 偏離平衡點為 10 公分之瞬間的加速度量值為何？

(4) 由右端點運動至平衡點右方 10 公分處，所需之最短時間為何？

$\begin{cases} v(t)=-\omega R\sin(\omega t) \\ v=\pm\omega\sqrt{R^2-x^2} \end{cases}$

$-\frac{k}{m}x=a=-\omega^2 x$

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{2\pi}{\omega}$

$=\sqrt{\frac{k}{m}}R$

$=\sqrt{\frac{4}{0.4}}\times0.2$

$=0.6\ (m/s)$#

解答

(1) 由（5-17）式可知，簡諧運動之週期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}，$$

已知 $m=0.40\ \text{kg}$，$k=4.0\ \text{N/m}$，則

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.40\ \text{kg}}{4.0\ \text{N/m}}}=2.0\ \text{s}$$

(2) 簡諧運動的最大速率 v_{max} 為 ωR，其中簡諧運動的角頻率 $\omega=\frac{2\pi}{T}$ $=3.1\ \text{s}^{-1}$，振幅 $R=20\ \text{cm}$，則

(3) $|a|=+\omega^2 x=+\frac{k}{m}x=\frac{4}{0.4}\times0.1$

$=1\ (m/s^2)$#

$$v_{max}=(3.1\ \text{s}^{-1})(20\ \text{cm})=62\ \text{cm/s}$$

(3) 簡諧運動之作用力 F 與位置 x 之關係為 $F=-kx$，即

$$|F|=k|x|$$

所以當 $|x|=10\ \text{cm}$ 時，可得

$$|a_x|=\left|\frac{F}{m}\right|=\frac{4.0\ \text{N/m}\times0.1\ \text{m}}{0.4\ \text{kg}}=1.0\ \text{m/s}^2$$

(4) 如圖 5-30 所示，利用等速圓周運動的投影可以模擬簡諧運動的觀念，當簡諧運動由右端點移動至平衡點右方 10 cm 處，等速圓周運動相對圓心繞過的角度為 60°，故質點的運動時間

$$t=\frac{60^\circ}{360^\circ}T，可得$$

$$t=\frac{1}{6}(2.0\ \text{s})=0.33\ \text{s}。$$

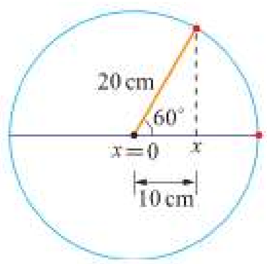
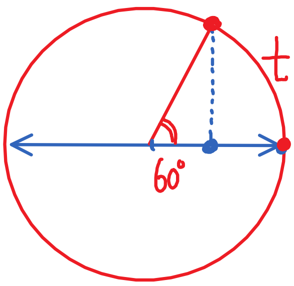


圖 5-30

☆(4) 考慮參考圓



$t=\frac{T}{6}=0.3(S)$#

範例 5-6

週期 T 為 2.0 秒的單擺作微幅擺動，由左端到右端所經過的時間為 1.0 秒，可用來顯示一秒的時距，則此單擺的擺長為何？（重力加速度 g 為 9.8 公尺/秒^2）

秒擺

解答

設單擺的擺長為 L，在小角度擺動的條件下，單擺的擺動週期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

則 $L = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = \dfrac{(9.8\ \mathrm{m/s^2})(2.0\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0.99\ \mathrm{m}$

所以我們可以拿一條約 1 公尺的細繩，繫住一重物，作小角度的左右擺動，會發現這是一個可以使用的計時工具。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$$

$\therefore \ell \approx 1(\mathrm{m})$ #